CALENDRIER MATHÉMATIQUE 2021

LE CIEL DANS TOUS SES ÉTATS

ARTISTE INVITÉE
ALE DE LA PUENTE

NOTRE SYSTÈME SOLAIRE VA-T-IL S'EFFONDRER ?

Cette question est loin d'être théorique ! Le système solaire compte huit planètes qui tournent autour du Soleil. Chacun de ces neuf astres, ou corps, exerce une force de gravité sur les autres corps, et chacun est attiré par les huit autres. Les lois de la mécanique de Newton permettent d'écrire des équations gouvernant le mouvement de l'ensemble. On parle de “problème à neuf corps” car il y a neuf astres en interaction. Le mot “problème” vient du fait que la connaissance des forces qui gouvernent le système n'implique pas que l'on puisse résoudre les équations et, donc, décrire le mouvement des astres.

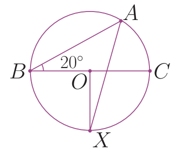
Pour pouvoir en dire quelque chose, il faut simplifier le problème. Le Soleil est très massif, les forces de gravitation entre lui et chacune des huit planètes dominent les autres forces. Le problème à neuf corps se transforme alors en huit problèmes à deux corps. On fait comme si chacune des planètes n'interagissait qu'avec le Soleil en tournant selon une orbite elliptique autour de lui.

Ainsi, il est mathématiquement possible de déterminer où seront les planètes dans un, dix ou cent ans… mais pas dans 10 millions d'années ! À cette échelle de temps, le système solaire ne se comporte plus comme huit problèmes à deux corps indépendants, car les petites interactions entre les planètes ne sont plus négligeables. Il est aussi impossible de prédire la position exacte des planètes à cette échelle de temps que de prévoir exactement la météo en France dans un mois. À cause de cette imprévisibilité, on parle de système chaotique. Cela ne signifie pas que nous ne pouvons rien savoir du futur astronomique de notre planète, mais une autre approche est nécessaire, par exemple en faisant appel aux statistiques pour décrire en moyenne le comportement des planètes.

Jacques Laskar, astronome à l'Observatoire de Paris, a fait calculer par un ordinateur le futur du système solaire sur cinq milliards d'années. Pour cela, il a remplacé le problème initial par le problème moyennisé, pour lequel les méthodes de calcul numérique sont mille fois plus rapides. Les calculs ont été faits non pas une fois, mais 2 500 fois. À chaque fois, les positions des planètes, à partir desquelles le futur est calculé, diffèrent de presque rien (environ un mètre). Ces disparités sont invisibles à l'œil nu mais donnent des trajectoires divergeant drastiquement à partir de dix millions d'années. Parmi ces trajectoires, environ 1 % comporte une collision entre des planètes. C'est donc peu probable mais 1 % ce n'est quand même pas rien !

lun | mar | mer | jeu | ven | sam | dim

1 Si O est le centre du cercle et $[OX]$ est perpendiculaire au diamètre $[BC]$, combien mesure l'angle $\widehat{OXA}$?

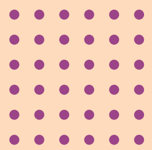


2 Si x et y sont deux nombres réels vérifiant $x^2 + 4y^2 = 1$, quelle est la plus petite valeur possible pour $|x| + 2|y|$?

3

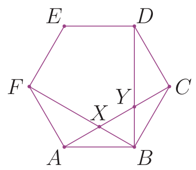
4

5 Combien peut-on former de carrés dont les sommets se trouvent sur la grille et dont les côtés sont parallèles aux bords de la grille ?



6 Une petite cartouche d'encre imprime 600 pages. Trois petites cartouches d'encre impriment le même nombre de pages qu'une cartouche de taille moyenne. Trois de ces cartouches impriment le même nombre de pages que deux grandes cartouches. Combien de pages peut-on imprimer avec une grande cartouche ?

7 Les côtés de l'hexagone régulier mesurent 1 cm. Calculer la distance séparant les points X et Y.



8 On tire au hasard une carte dans un jeu de 40 cartes distinctes, puis on la remet immédiatement dans le paquet. On mélange les cartes, puis on en choisit de nouveau une au hasard. Quelle est la probabilité de choisir la même carte que celle choisie la première fois ?

9 Dans un pays lointain, sont organisés tous les cinq ans en février des jeux de sports d'hiver dont la cérémonie de clôture a lieu le dernier jour du mois. Cette compétition a eu lieu pour la première fois en l'an 740. Combien d'années cette compétition a-t-elle fini un 29 février ?

10

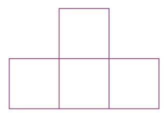
11

12 Combien de couples de nombres réels (x, y) satisfont :

$$\begin{aligned} 1 + x &= y^2 \\ 1 + y &= x^2 \end{aligned}$$?

13 Parmi les nombres composés compris entre 1 et 100, combien sont premiers avec l'entier 21 ? On dit qu'un nombre entier est composé s'il possède au moins un diviseur différent de 1 et de lui-même.

14 Les côtés des carrés mesurent 1 cm. En utilisant exactement 16 figures comme celles-ci, trouver une manière de paver un carré de taille 8×8 cm.



15 Dans un carré $ABCD$, on trace deux segments partageant l'angle $\widehat{DAB}$ en trois angles égaux et construisant ainsi deux triangles égaux et un quadrilatère. Quel est le rapport de l'aire de ce quadrilatère sur l'aire d'un des triangles égaux ?

16 Chaque sommet d'un polygone régulier à dix côtés est étiqueté par un nombre entier qui a pour parité celle de la somme des deux nombres attribués aux sommets voisins. Quelle est la parité du nombre de sommets étiquetés par des nombres impairs ?

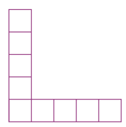
17

18

19 Quel est le plus grand des nombres suivants : $1^3 + 2021^3$, $2^3 + 2020^3, 3^3 + 2019^3, \ldots,$ $1011^3 + 1011^3$?

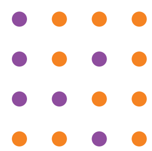
20 Combien de nombres à deux chiffres sont tels que la somme de leurs chiffres est une puissance de 2 ?

21 Sophie souhaite découper en morceaux la figure pour former un carré de taille 3×3. Combien de coups de ciseaux devra-t-elle donner au minimum pour y parvenir ?



22 Trouver tous les triplets (a, b, c) d'entiers positifs, avec $a \leq b \leq c$, qui ne soient pas tous les trois multiples d'un même nombre premier mais tels que a divise $b + c$, b divise $a + c$ et c divise $a + b$.

23 Combien peut-on construire de triangles dont les trois sommets sont placés sur des points de la même couleur ?



24

25

26 Une bassine d'eau a le même volume que trois grands vases et un petit. Elle a aussi le même volume que quatre petits vases et deux grands. Combien de petits vases sont nécessaires pour remplir la bassine ?

27 Soit ABC un triangle aigu et soit H le pied de la hauteur issue de C sur $[AB]$. Le rapport entre l'aire du triangle AHC et l'aire du triangle ABC est égal au rapport des longueurs AC et $2AB$. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{CAB}$.

28 Existe-t-il un entier positif tel que le produit des chiffres qui le composent soit égal à 2021 ?

29 Si a, b et c sont trois entiers distincts compris entre 1 et 10, quelle est la plus grande valeur que $a(b + c) - b(a + c)$ peut atteindre ?

30 Pour quels entiers n le nombre $n^5 - 5n^3 + 4n$ est-il divisible par 120 ?

cimi
Centre International
de Mathématiques et d'Informatique
TOULOUSE

ET SI LES MATHÉMATIQUES NOUS PAYAIENT UN VOYAGE ?

Les voyages interplanétaires nous semblent chers et gourmands en énergie. Mais, depuis une trentaine d'années, les agences spatiales découvrent le *low cost* spatial, grâce (surprise ?) aux théorèmes mathématiques. À la base de ces théorèmes, rien d'autre que les lois de gravitation de Newton établies au XVIIe siècle !

En mécanique céleste, ce que l'on appelle “le problème à trois corps restreint” consiste à étudier le mouvement d'un corps de petite masse soumis aux forces d'attraction gravitationnelle de deux corps massifs (par exemple, un satellite dans le système Soleil-Terre ou le système Terre-Lune). Pour étudier ce problème, les équations peuvent être écrites dans un référentiel tournant : les deux corps massifs sont fixes et il faut considérer une force centrifuge. Ce système a cinq points d'équilibre, dits “points de Lagrange”. À ces endroits, les forces d'attraction dues aux deux corps massifs et à la force centrifuge se compensent. C'est pour cela que ces points constituent d'excellents sites pour l'observation du cosmos et que l'on y place de nombreux engins spatiaux. Par exemple, le télescope spatial *James-Webb*, successeur du télescope *Hubble*, sera lancé en mars 2021 vers le point de Lagrange L-2 du système Soleil-Terre.

Ces points de Lagrange ont d'autres propriétés. À partir de chacun des cinq points de Lagrange, il existe des trajectoires bien comprises, chacune engendrant des “courants de gravité”. Comme des courants marins, ils sont capables de transporter un vaisseau spatial de manière totalement “gratuite”, c'est-à-dire sans l'aide d'un moteur. Les courants de gravité se propagent dans des sortes de “tubes” invisibles qui traversent notre système solaire et relient les corps célestes les uns aux autres – et qui bougent sans cesse au gré des éphémérides. L'existence de ces tubes a pu être découverte par une étude purement mathématique des voisinages des points de Lagrange.

La cartographie des courants de gravité permet d'envisager des missions spatiales interplanétaires (robotisées, car lentes) ne nécessitant presque pas d'énergie. En ce moment, les agences spatiales planifient des missions cargo vers la Lune en utilisant ces courants, dans le but de construire une base lunaire qui servira de point de départ pour de futures missions vers Mars.

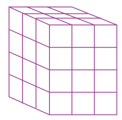
Mais n'oublions pas qu'aucun télescope ne révélera ces courants : ce n'est que l'esprit scientifique qui les apprivoise ! Pour ne pas être d'ignorants touristes spatiaux vers les étoiles à venir, continuons donc à faire des mathématiques !

lun mar mer jeu ven sam dim

1 Quelle est la plus grande puissance de 2 qui divise $10^{2021} - 2 \times 4^{1010}$?

2 La moyenne de cinq entiers consécutifs, dont le premier est a, vaut b. Quelle est la moyenne des cinq entiers consécutifs dont le premier est b ?

3 Un pavé droit est un prisme dont tous les angles sont droits. Celui de la figure est formé de cubes, avec dimensions $3 \times 3 \times 4$. Combien de pavés droits différents peut-on ainsi construire avec 36 cubes ?



4 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1 cm. On construit, à l'extérieur du triangle, les carrés $ABDE$, $BCHI$ et $CAFG$ s'appuyant sur ses trois côtés. Quelle est l'aire de l'hexagone $DEFGHI$?

5

6

7 Combien de nombres différents peut-on obtenir en ajoutant deux des entiers de la liste $1, 3, 5, 7, 9$?

8 Dans un heptagone régulier, combien y a-t-il de façons de tracer un certain nombre de diagonales (au moins une) de telle sorte qu'elles ne s'intersectent ni à l'intérieur ni au bord de l'heptagone ?

9 Combien de valeurs peut prendre l'expression $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$?

10 Est-il possible de construire un quadrilatère de telle sorte que, pour tout choix de trois de ses angles intérieurs, leur somme est toujours strictement inférieure à $270°$?

11 Combien de nombres peut-on sélectionner au maximum parmi les entiers de 1 à 20 de telle sorte qu'il n'en existe pas deux dont le produit soit le carré d'un nombre entier ?

12

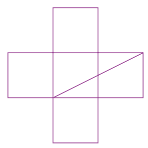
13

14 Compléter la multiplication à trous suivante.

$$\begin{array}{r} * \; * \; * \\ \times \quad 7 \; 2 \\ \hline 2 \; 6 \; 2 \; * \; 0 \end{array}$$

15 Combien y a-t-il de nombres à cinq chiffres dont la somme des chiffres se termine par 7 ?

16 Une piscine a une forme de croix. La diagonale indiquée sur le schéma mesure 8 m. Quelle est l'aire de la piscine, en mètres carrés ?



17 Quel est le plus petit entier naturel qui donne un reste de 1 quand on le divise par 2, de 2 quand on le divise par 3, et, ainsi de suite, de 3 (respectivement $4, 5, 6, 7$ et 8) quand on le divise par 4 (respectivement $5, 6, 7, 8$ et 9) ?

18 Quel est le plus grand nombre parmi la racine carrée de 2 et la racine cinquième de 5 ?

19

20

21 Antoine dit à Xavier : « Quand je dis la vérité, toi aussi. » Xavier lui répond : « Quand je mens, toi aussi ». Est-il possible que, dans ces conditions, l'un mente et l'autre dise la vérité ?

22 Deux palmiers de 9 m et 6 m de hauteur sont situés de part et d'autre d'une rivière à 15 m de distance. Deux mouettes, perchées sur les deux arbres, s'élancent simultanément en direction d'un poisson qui nage entre les deux palmiers. Elles l'atteignent en même temps. Quelle est la distance entre le poisson et le palmier le plus haut ?

23 Le produit $8 \times 888\ldots8$, où le deuxième facteur a k chiffres, est un entier dont la somme des chiffes vaut 1000. Combien vaut k ?

24 Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les solutions de l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Combien vaut :

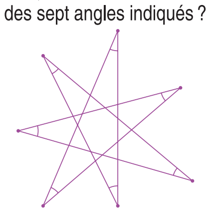
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \; ?$$

25 Placer les entiers de 1 à 5 autour d'un cercle de telle façon qu'en sommant un certain nombre d'entiers placés consécutivement, on obtienne tous les entiers de 1 à 15.

26

27

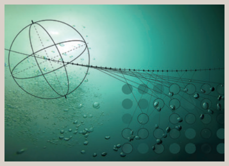
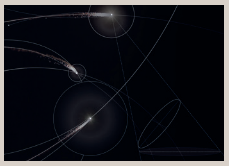
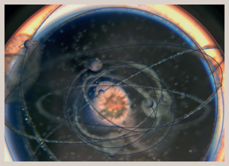
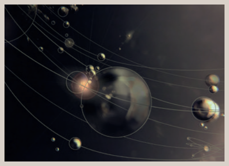
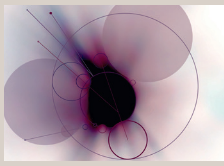
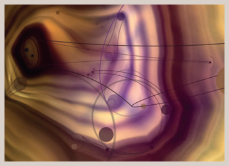
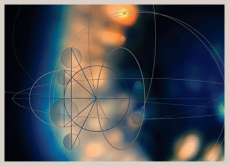
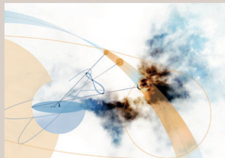
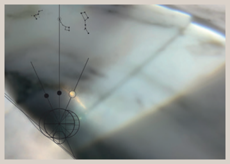
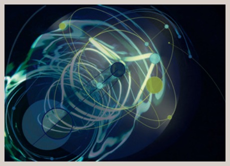
28 Quelle est la somme des sept angles indiqués ?

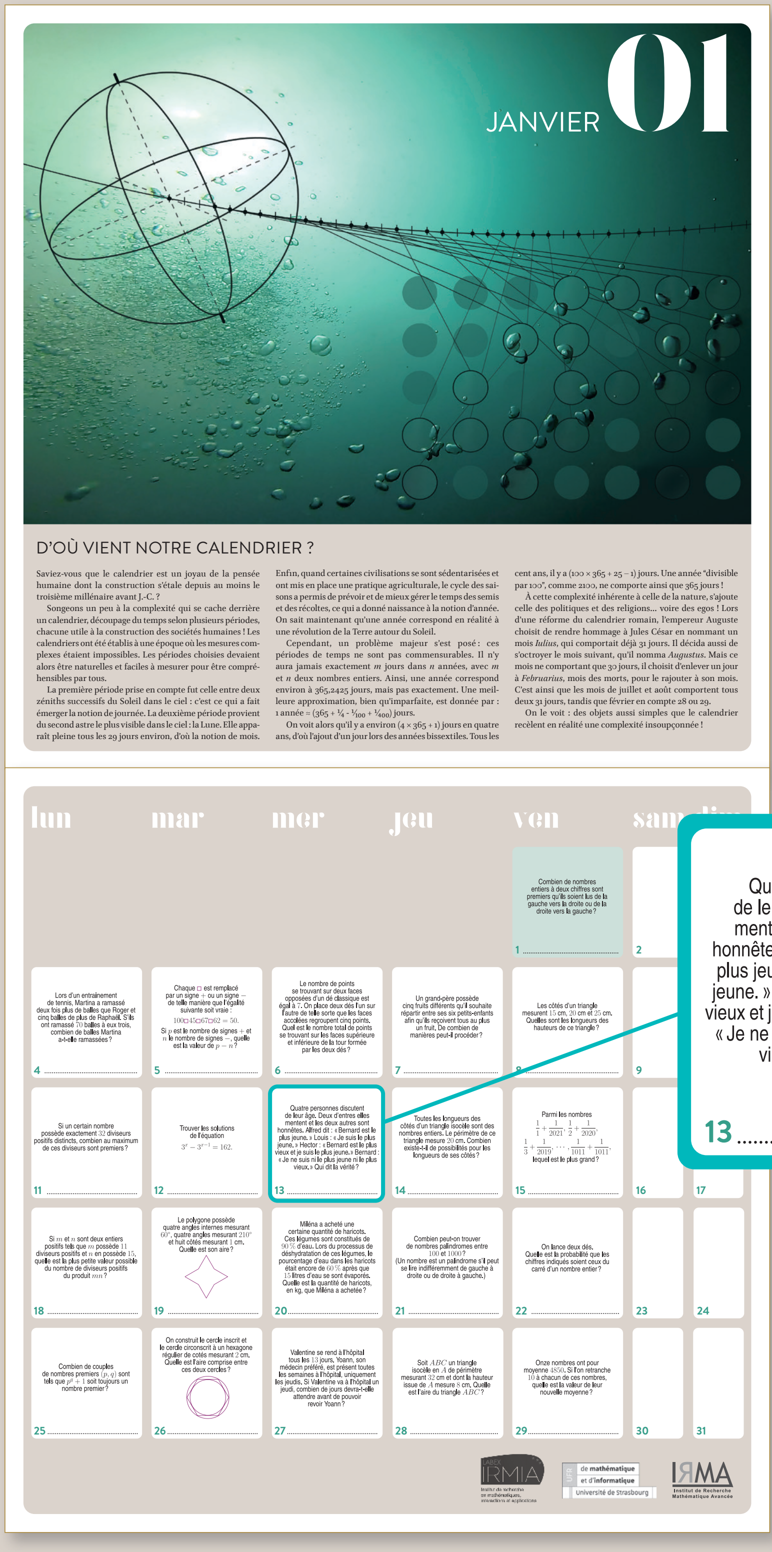


29 On dispose d'une liste de a nombres dont la moyenne vaut 5 et une liste de b autres nombres dont la moyenne vaut 8 (a et b étant strictement positifs). Si l'on sait que la moyenne de tous les nombres est entière, quelles valeurs peut avoir le quotient $\frac{a}{b}$?

30 Deux vis, trois clous et un écrou pèsent 5 grammes. Une vis, deux clous et deux écrous pèsent 7 grammes. Combien pèsent cinq vis, neuf clous et sept écrous ?

LABEX MILYON UNIVERSITÉ DE LYON
MMI MAISON DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



Comment étudier le ciel ?
Comment prédire le mouvement des astres ?

• De janvier à décembre à travers 12 textes superbement illustrés, découvrez l'histoire des équations cachées dans les trajectoires des planètes et des étoiles ainsi que le développement des grandes théories qui ont accompagné cette aventure.

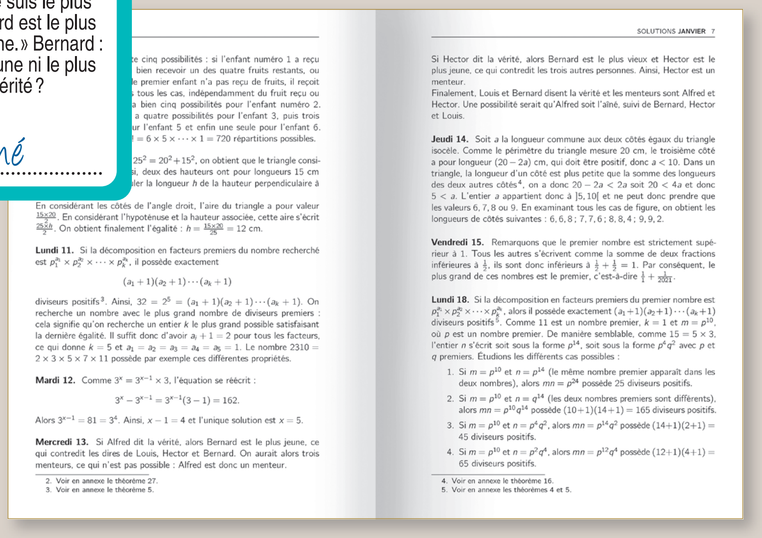
• Jour après jour, excepté les week-ends, faites travailler vos méninges en résolvant les exercices et les énigmes élaborés par une équipe de spécialistes. Le défi journalier trouve sa solution en dernière page ; son explication détaillée est proposée dans le livret.

261 QUESTIONS

Quatre personnes discutent de leur âge. Deux d'entres elles mentent et les deux autres sont honnêtes. Alfred dit : « Bernard est le plus jeune. » Louis : « Je suis le plus jeune. » Hector : « Bernard est le plus vieux et je suis le plus jeune. » Bernard : « Je ne suis ni le plus jeune ni le plus vieux. » Qui dit la vérité ?

13 13h Kiné

261 RÉPONSES



Pratiquer les maths n'a jamais été aussi ludique !

AVEC LE SOUTIEN DE
FONDATION BLAISE PASCAL

Sous la direction de Ana Rechtman Bulajich
Textes d'ouverture mensuels : Marie Lhuissier, Olga Paris-Romaskevich et Valentin Seigneur
Questions et réponses : Anne Alberro Semerena, Radmila Bulajich Manfrino, Marco Antonio Figueroa Ibarra, Ana Rechtman Bulajich et Rogelio Valdez Delgado

PUG
Prix France TTC : 18,50 €
ISBN : 978-2-7061-4729-6
9 782706 147296
Ne peut être vendu séparément du livret