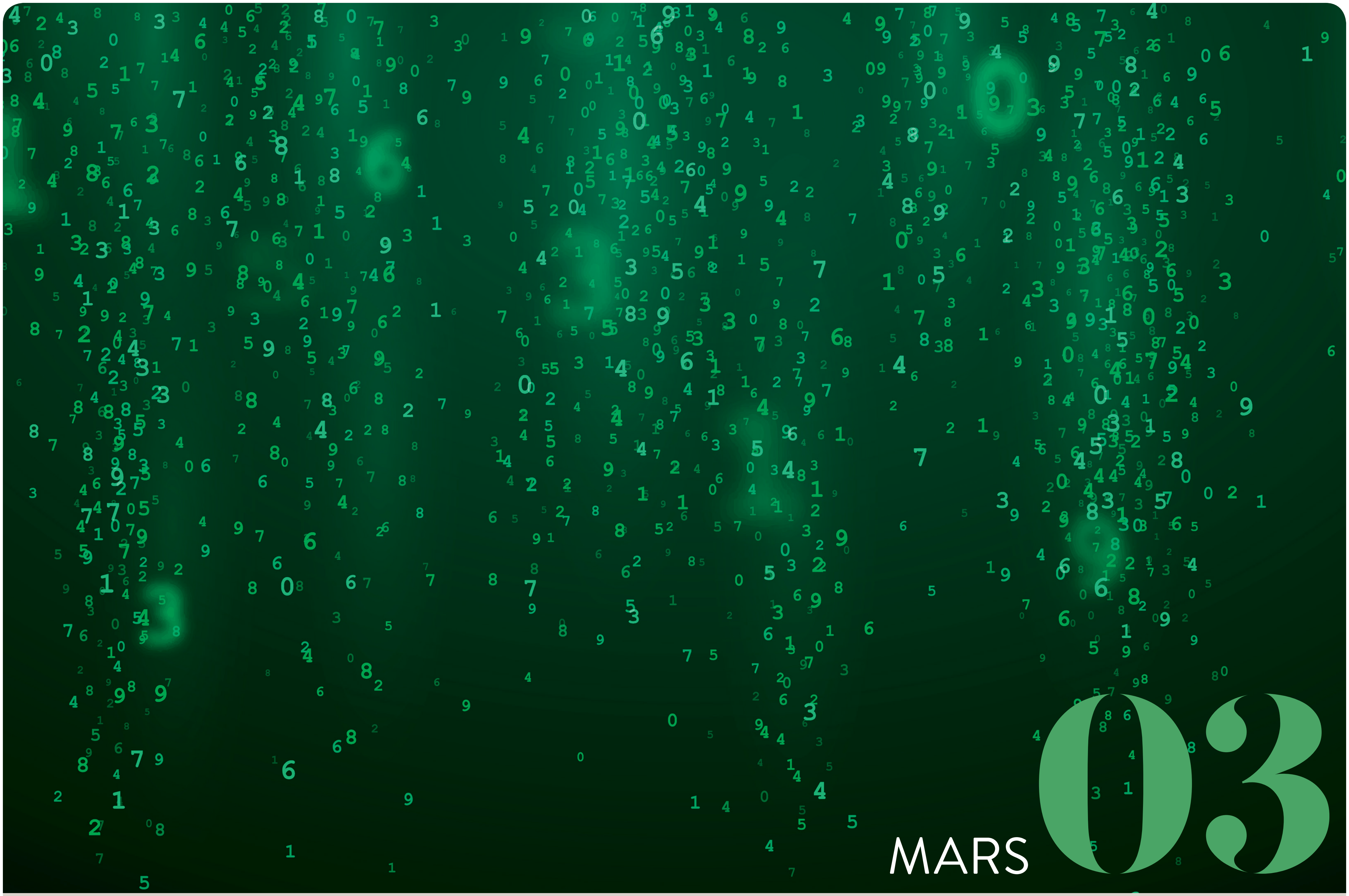
CALENDRIER MATHÉMATIQUE 2019

UN DÉFI QUOTIDIEN

LE MONDE DE L'ALÉATOIRE



LE GÉNÉRATEUR ALÉATOIRE

Les tirages aléatoires de nombres interviennent dans de très nombreux domaines : les simulations numériques de phénomènes physiques, la cryptographie ou encore les méthodes de Monte-Carlo (voir le mois de février). Le procédé qui, à chaque tirage aléatoire, associe un nombre s'appelle une variable aléatoire. Avant le tirage, on ne peut pas connaître la valeur qui va sortir.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est l'outil mathématique qui décrit les valeurs que peut prendre cette variable, ainsi que la fréquence à laquelle ces valeurs apparaissent. Une variable aléatoire peut suivre différentes lois de probabilité, comme une loi uniforme, une loi de Poisson, une loi gaussienne, etc. Théoriquement, si l'on sait simuler selon la loi uniforme, on sait le faire selon toute autre loi. Concentrons-nous donc sur le tirage de valeurs selon la loi uniforme continue sur [0;1]. Le cerveau humain n'est pas du tout performant lorsqu'il s'agit de simuler des valeurs selon une loi uniforme. Faisons donc appel à l'ordinateur. *A priori* cela peut paraître absurde, puisque par construction un ordinateur est complètement déterministe (c'est-à-dire dépourvu d'aléatoire). L'ordinateur produit en réalité des nombres dits pseudo-aléatoires, au sens où ils sont générés de façon déterministe par un programme informatique, mais imitent de façon satisfaisante les résultats de tirages aléatoires. Voyons comment sont générés ces nombres pseudo-aléatoires.

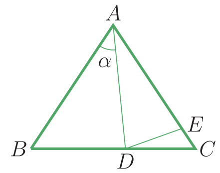
Il existe différentes méthodes. La plus simple est celle des « générateurs linéaires congruentiels ». On découpe l'intervalle [0;1] en m morceaux, avec m très grand. On se contente de simuler des entiers compris entre 0 et m, puisqu'en divisant chacun de ces entiers par m on obtient les nombres souhaités entre 0 et 1. On construit pour cela une suite d'entiers (S_n) par récurrence à partir d'une graine S_0. La valeur S_{n+1} s'obtient en calculant le reste de la division euclidienne de $aS_n + b$ par m, avec a et b astucieusement choisis. Ce reste est forcément compris entre 0 et m.

Comment évaluer la qualité du générateur pseudo-aléatoire ? Pour cela on utilise des critères statistiques afin de s'assurer que l'on ne parvient pas à distinguer le comportement statistique des nombres ainsi générés de celui de variables aléatoires uniformes. Parmi les propriétés pertinentes, on pourra ainsi vérifier que la densité des points est uniforme ou encore que les tirages ne sont pas corrélés (autrement dit, que le fait de savoir où se trouve un point ne donne pas d'information sur la place d'un autre). En fait, le comportement statistique des générateurs congruentiels n'est pas très satisfaisant car ils sont périodiques. Une perspective d'avenir ? L'aléatoire étant intrinsèquement présent en physique quantique, pour générer des nombres vraiment aléatoires, pourquoi ne pas utiliser un ordinateur quantique ?

lun | mar | mer | jeu | ven | sam | dim

1

Si $\widehat{BAD} = \alpha$, $AB = AC$ et $AD = AE$. Combien mesure l'angle $\widehat{CDE}$?



2

3

4

On dispose d'un réservoir d'eau et de deux bidons de 3 et 5 litres. Peut-on mesurer exactement 4 litres d'eau en utilisant uniquement ces deux bidons ?

5

Trouver deux nombres réels a et b tels que $2^a \times 4^b = 8$ et $a + 7b = 4$.

6

Un couple a deux enfants dont on ignore les sexes. Si l'on apprend que l'un des deux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit également un garçon ? On suppose qu'il est aussi probable d'avoir un garçon qu'une fille.

7

Peut-on écrire les nombres $1, 2, \ldots, 1000$ de telle sorte que deux nombres consécutifs ne diffèrent jamais de (strictement) moins de 500 ?

8

Quels sont les nombres rationnels positifs r tels que

$$r + \frac{1}{r}$$

soit un entier ?

9

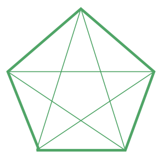
10

11

Théo est plus vieux que Léo, lui-même plus vieux qu'Enzo. Léo a la même différence d'âge avec Théo qu'avec Enzo. Il y a cinq ans, l'âge de Théo était le double de la différence d'âge qu'il avait avec Léo. Quel âge a Enzo ?

12

Combien peut-on former de triangles isocèles dont les sommets sont des sommets d'un pentagone régulier ?



13

Chez les Martin vivent : M. et Mme Martin, leur fils, la sœur de M. Martin et le père de Mme Martin. En les appelant par leurs signes astrologiques, on sait que Lion et Taureau ne sont pas liés par le sang, que Bélier est plus jeune que sa belle-sœur mais plus vieux que Taureau et que Cancer est plus vieux que Balance. Qui est Balance ?

14

Un ballon de football est formé de 32 panneaux de cuir, dont 20 sont des hexagones réguliers et 12 des pentagones réguliers. Combien de coutures doit-on réaliser et combien de coins obtient-on ?

15

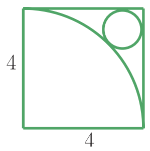
Combien y a-t-il de nombres entiers à deux chiffres tels que la différence entre le nombre lui-même et le produit de ses deux chiffres soit 12 ?

16

17

18

Un quart de cercle est inscrit dans un carré de côté 4. Combien mesure le rayon du petit cercle, supposé tangent au quart de cercle et à deux côtés du carré ?



19

Un vendeur malhonnête escroque ses clients de $12\,\%$ en utilisant des poids truqués pour sa balance. Combien pèse réellement son poids de un "kilogramme" ?

20

Quelle fraction obtient-on en simplifiant l'expression

$$\frac{2^{n+4} - 2 \times 2^n}{2 \times 2^{n+3}} \text{ ?}$$

21

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles. On fixe 4 points sur $\mathcal{D}$ et 5 points sur $\mathcal{D}'$ et on trace tous les segments joignant ceux-ci à ceux-là. Combien y aura-t-il d'intersections entre ces segments ? (On ne compte pas les points d'intersection sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et on suppose que trois de ces segments ne s'intersectent jamais en un même point).

22

En notant a, b et c les solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, combien vaut

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \text{ ?}$$

23

24

25

Trouver tous les entiers strictement positifs x et y tels que

$$6 \times (x! + 3) = y^2 + 5$$

(où $x!$ désigne le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times x$).

26

Effectuer mentalement la multiplication 98×102.

27

Soit ABC un triangle équilatéral. On note L et M les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et N le point d'intersection de la demi-droite $[LM)$ avec le cercle circonscrit à ABC. Calculer $\dfrac{LM}{MN}$.

28

Quels entiers strictement positifs n et m vérifient $2^n + 1 = m^2$?

29

Un village comporte $70\,\%$ de "pires" et $30\,\%$ de "purs". Les "pires" disent la vérité 5 fois sur 100 alors que les "purs" le font 90 fois sur 100. Si l'on demande à un habitant : "Es-tu un pire ?" et qu'il répond "Oui", quelle est la probabilité qu'il soit un "pire" ?

30

31

CIB

LE BRUIT DANS UNE IMAGE NUMÉRIQUE

Dans une image numérique, le bruit se caractérise par la présence de pixels parasites qui dénaturent l'image. La valeur de niveau de gris d'un pixel bruité est incorrecte au regard de l'image originale non bruitée. À quoi ressemble une image bruitée ? Cela dépend du type de bruit. En pratique, il existe différents types de bruit qui correspondent à des effets visuels différents et à des façons diverses de fausser la valeur de certains pixels de l'image. Un bruit peut être additif, auquel cas les erreurs s'ajoutent aux véritables niveaux de gris de certains pixels. Le bruit gaussien est un exemple de bruit additif qui occasionne des erreurs aléatoires, centrées en zéro, souvent petites, rarement grandes. Ainsi, la plupart des pixels bruités sont un peu plus foncés ou un peu plus clairs que ce qu'ils auraient dû être, et quelques rares pixels sont beaucoup plus foncés ou beaucoup plus clairs. La répartition spatiale d'un tel bruit est uniforme et ne dépend pas de l'image réelle représentée. Un bruit peut également être multiplicatif, auquel cas les erreurs viennent multiplier les véritables niveaux de gris de certains pixels. Le bruit de granularité cohérente, dit speckle, en est un exemple. Il se produit dans les images radar et sonar, les éclairages laser... Il existe encore d'autres types de bruits, comme le bruit uniforme dû à la quantification, le bruit de Poisson dû à des fluctuations fallacieuses du nombre de photons enregistrés par un détecteur, le bruit poivre et sel dû à des erreurs de transmission de l'information, etc.

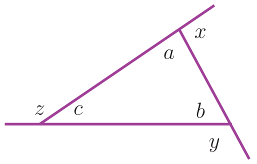
Bien sûr, dans la pratique, on ignore quels sont les pixels bruités et avec quelle intensité ils le sont ! Le traitement informatique du bruit n'est pas générique. Dans le cas d'un bruit gaussien, une méthode classique de débruitage consiste à remplacer la valeur de chaque pixel de l'image par une moyenne pondérée de ce pixel avec ceux qui l'entourent. La conséquence d'un tel traitement est de flouter l'image, car les discontinuités qui marquent les bords des objets sont alors atténuées. Une méthode alternative consiste à exploiter la similitude de certaines petites zones de l'image et à effectuer des moyennes de pixels entre ces petites zones. Les niveaux de gris des pixels correspondant aux bords des objets sont moyennés avec ceux des pixels correspondant à d'autres bords d'objets. Ainsi, les discontinuités qui marquent les bords des objets persistent. Encore faut-il que l'image réelle présente de petites zones similaires. Les recherches actuelles en matière de débruitage s'orientent vers l'exploitation des propriétés statistiques de petites zones de l'image délimitées de façon appropriée.

lun mar mer jeu ven sam dim

1

2

Si les angles extérieurs x, y et z d'un triangle sont dans des proportions $4 : 5 : 6$, dans quelles proportions sont les angles a, b et c ?



3

Trouver un nombre à deux chiffres tel qu'en lui ajoutant 1 et en inversant l'ordre des chiffres du nombre obtenu, on obtienne un nouveau nombre qui soit un diviseur du nombre initial.

4

Si a, b et c sont des nombres réels tels que $a + b + c = 14$, $c^2 = a^2 + b^2$ et $ab = 14$, combien vaut c ?

5

Exprimer le nombre 5 à l'aide des nombres $1, 9, 9$ et 7.

6

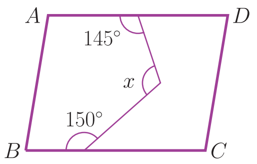
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 3 ni par 7 ?

7

8

9

Combien mesure l'angle x à l'intérieur du parallélogramme $ABCD$?



10

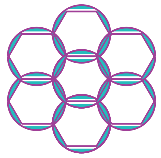
En sommant puis en soustrayant 44 et 18, on obtient deux nombres positifs s'écrivant avec les mêmes chiffres mais en inversant leur ordre. Combien de paires d'entiers positifs vérifient cette propriété ?

11

La télévision de Bruno reçoit les chaînes 2 à 42. Si Bruno allume la télévision sur la chaîne 15 et qu'il appuie 518 fois sur le bouton $+$ de la télécommande, à quelle chaîne sera-t-il rendu ?

12

Les hexagones sont réguliers de côtés de longueur 1. Calculer l'aire de la région colorée.



13

La somme de deux nombres entiers positifs vaut 125. Si on multiplie le premier par 4 et qu'on divise le second par 4, on obtient la même somme. Quels sont les deux nombres initiaux ?

14

15

16

Combien vaut $1 + 22 + 333 + \ldots + 999\,999\,999$?

17

Sébastien a dépensé exactement 1000 euros pour acheter 100 jouets de trois types différents. Chaque yoyo coûte 20 euros, chaque toupie 12 euros et chaque bilboquet 8 euros. Sachant que Sébastien a acheté au moins 10 jouets de chaque type, quel est le nombre maximal de toupies qu'il a pu acheter ?

18

Trouver la valeur des étoiles dans la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r} \star\star\star4\star\star \\ \times \quad\quad 7 \\ \hline 6\,7\,4\,3\star5\,6 \end{array}$$

19

Pour combien d'entiers x strictement compris entre 9 et 15 la suite $1, 2, 6, 7, 9, x, 15, 18, 20$ ne possède-t-elle pas trois termes en progression arithmétique ?

20

On construit la suite de nombres X_n de la manière suivante : $X_1 = 19$, $X_2 = 95$ et

$$X_{n+2} = [X_{n+1}, X_n] + X_n,$$

où $[a, b]$ dénote le plus petit commun multiple de a et b. Touver le plus grand commun diviseur de X_{2018} et X_{2019}.

21

22

23

Soient a et b deux entiers différents de -1 tels que

$$\frac{ab^2+1}{b^2} = b^2 + \frac{1}{a}.$$

Quelle est la valeur du produit ab ?

24

Trouver le plus petit nombre divisible par 999 qui ne contient pas de 9 parmi ses chiffres.

25

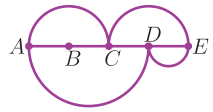
Quel est le nombre suivant dans la suite $6, 18, 72, 360, 2160, \ldots$?

26

Partons d'un nombre x différent de 1. Faisons le quotient de $x + 1$ par $x - 1$. On obtient un second nombre auquel on applique la même opération, c'est-à-dire qu'on fait le quotient de ce nombre plus 1 par ce nombre moins 1, et ainsi de suite. Quel sera le onzième nombre de la suite ainsi construite ?

27

Si $AB = BC = CD = DE$, quel est le rapport entre la somme de l'aire des demi-cercles situés au-dessus du segment $[AE]$ et la somme de l'aire des demi-cercles situés en dessous ?



28

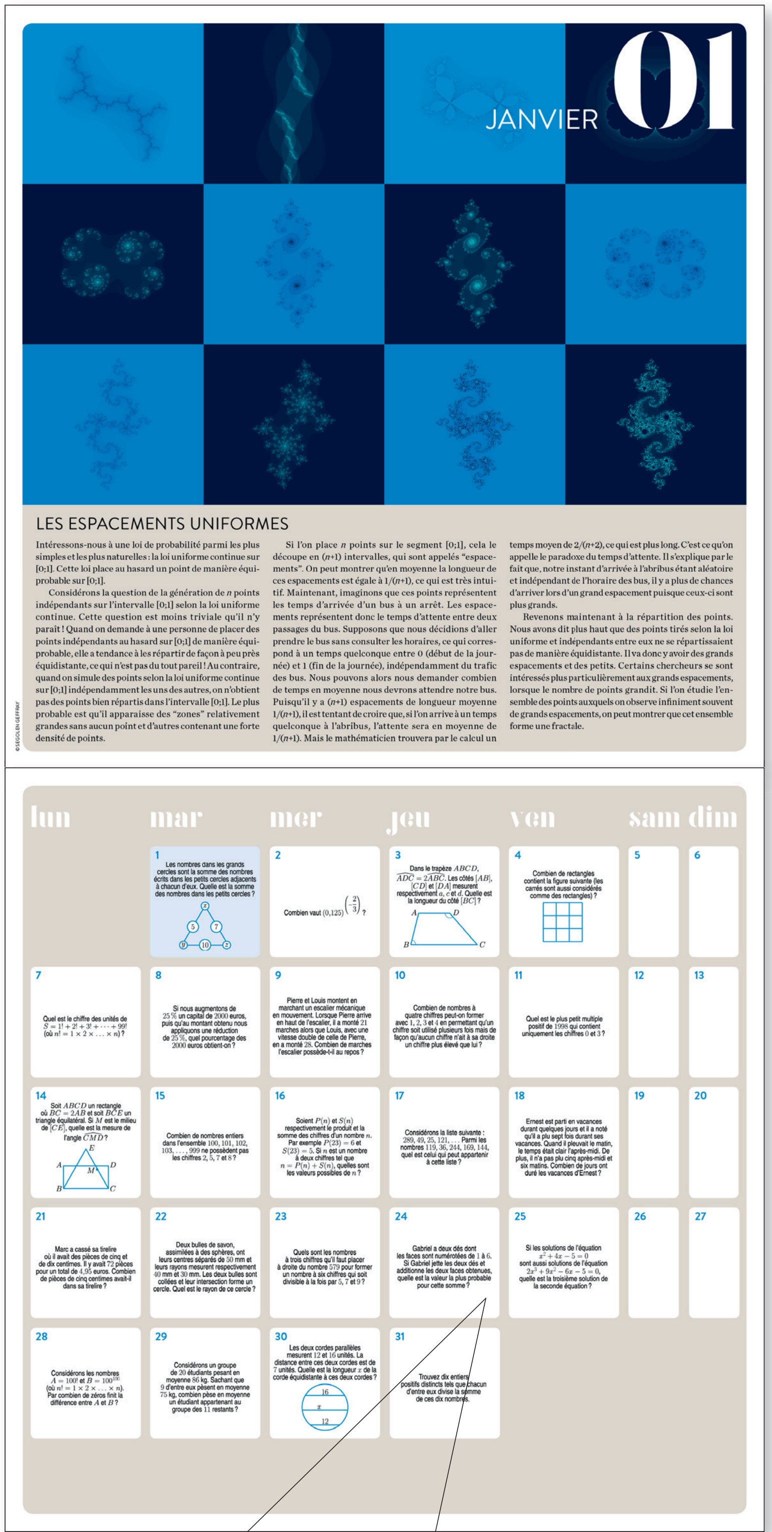
29

30

Quelle est la somme de tous les chiffres dont est composé le nombre $10^{75} - 75$?

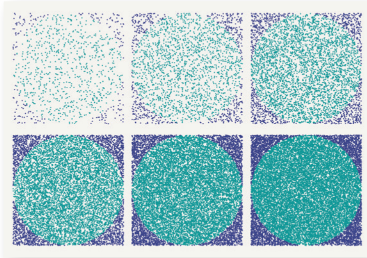
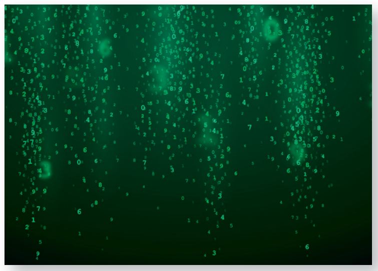
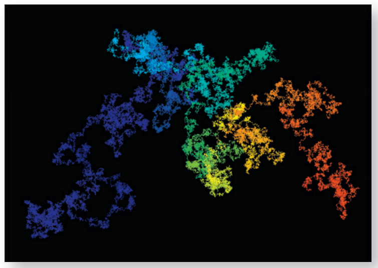
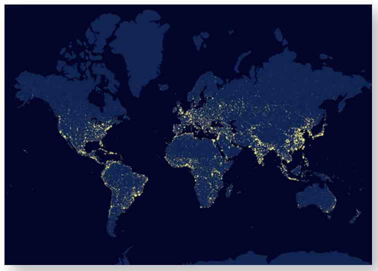
CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS

LE MONDE DE L'ALÉATOIRE

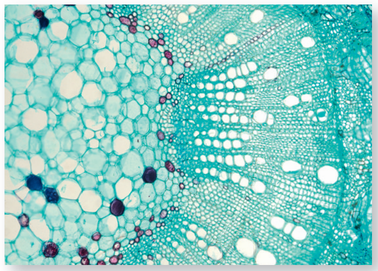
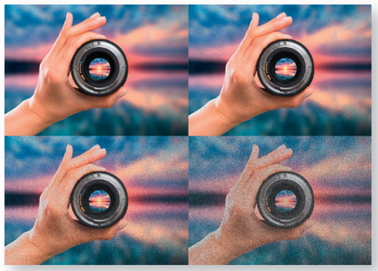
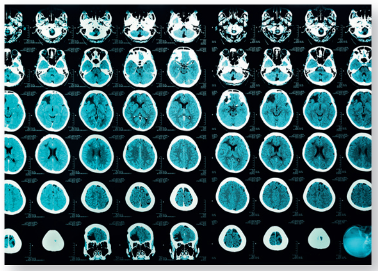
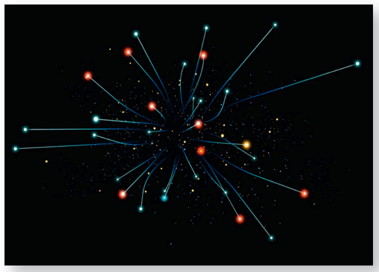


24

Gabriel a deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si Gabriel jette les deux dés et additionne les deux faces obtenues, quelle est la valeur la plus probable pour cette somme ?




Un calendrier pour faire travailler ses méninges et partir à la découverte du monde de l'aléatoire.
Chaque mois un phénomène aléatoire et les résultats qui en découlent sont expliqués en texte et en image. Une merveilleuse plongée dans le monde du hasard !
Chaque jour, exceptés les week-ends, des exercices et des énigmes sont proposés sous forme de défis quotidiens.
La réponse à chaque exercice et énigme est fournie en dernière page du calendrier. Elle est aussi détaillée avec précision dans le livret des solutions.

Pratiquer les maths n'a jamais été aussi ludique !

Sous la direction de :
Ana Rechtman Bulajich
avec la collaboration
de Nicolas Hussenot

Textes :
Claire Coiffard-Marre
Ségolen Geffray

Exercices et livret des solutions :
Anne Alberro Semerena
Radmila Bulajich Manfrino
José Antonio Gómez Ortega

PUG

Prix France TTC : 15 €
ISBN : 978-2-7061-4217-8
9 782706 142178