CALENDRIER MATHÉMATIQUE 2020

UNE HISTOIRE D'ALGORITHMES

D'AL-KHUWĀRIZMĪ À GÖDEL

Un algorithme est un procédé qui permet de résoudre un problème sans avoir besoin d'inventer une solution à chaque fois. Par exemple, quand on a appris un algorithme pour faire un nœud de cravate, on ne se pose plus de question quand il s'agit d'en faire un. Les mathématiciens s'intéressent aux algorithmes depuis toujours, en particulier quand ils traitent de symboles comme les nombres. D'ailleurs, le mot "algorithme" vient du mathématicien perse, de langue arabe, Muhammad Mūsā al-Khuwārizmī, qui vécut au IXe siècle.

Pour décrire abstraitement un algorithme, on utilise une mémoire, c'est-à-dire un endroit où stocker des symboles. On dispose aussi d'un jeu d'instructions étonnamment simples : (i) aller chercher des symboles déjà stockés dans la mémoire, les modifier et faire des opérations dessus (ii) tester le contenu d'un endroit particulier de la mémoire, ou (iii) répéter une séquence d'opérations tant que certaines conditions restent vraies. Un algorithme est constitué d'une suite de telles instructions.

Pour illustrer cette notion, considérons une méthode attribuée à Euclide (vers 300 av. J.-C.) qui permet de calculer le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers, leur PGCD. Par exemple, le PGCD de 6 et 15 est 3, car 3 divise ces deux nombres et aucun nombre plus grand que 3 ne le fait.

On commence par regarder les deux nombres. Si l'un divise l'autre, c'est gagné : le plus petit est le PGCD. Sinon, l'algorithme préconise d'ôter au plus grand nombre, disons a, le plus petit, disons b. On se retrouve, comme au départ, avec deux nombres : b et le résultat de la soustraction a-b. On reproduit alors la même opération, encore et encore, jusqu'à ce que l'un des deux divise l'autre. Quels que soient les nombres de départ, un jour l'algorithme s'arrêtera avec un des deux nombres qui divise exactement l'autre. Alors, le PGCD des deux nombres de départ est ce nombre-là.

Pas besoin d'être Euclide ! Il suffit de suivre cet algorithme sans réfléchir pour obtenir le PGCD. Encore plus fort, on peut écrire un programme informatique qui réalise cet algorithme.

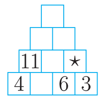
Nous rencontrerons dans ce calendrier des exemples d'algorithmes qui permettent de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques. Peut-on, quel que soit le problème, toujours trouver un algorithme qui le résolve ? Non ! Les travaux de mathématiciens des années 1930, notamment Kurt Gödel, ont montré que, pour certains problèmes, il n'existait pas d'algorithme pour les résoudre.

lun mar mer jeu ven sam dim

1 Un passant à qui l'on demande l'heure répond : "dans 20 minutes, il sera 10 heures 32 à ma montre." Sachant que la montre du passant avance de 5 minutes, quelle heure était-il il y a 10 minutes ?

2 Trouver tous les nombres à deux chiffres qui augmentent de $75\,\%$ quand on échange leurs chiffres.

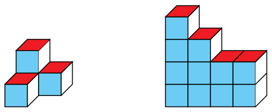
3 Chaque case du tableau contient la somme des nombres apparaissant dans les deux cases inférieures. Par exemple, la case marquée $\star$ contient la somme $6+3$. Quel nombre contient la case au sommet ?



4

5

6 On empile des cubes identiques. Le premier empilement a quatre cubes et pèse 200 g et le second pèse 700 g. Combien y a-t-il de cubes cachés sur le dessin ?

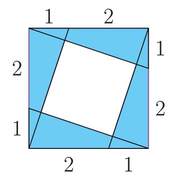


Empilement 1 Empilement 2

7 Déterminer les entiers strictement positifs n tels que n^2+1 divise n^2+5n+2.

8 Mon studio de yoga propose une offre sans abonnement, dans laquelle chaque cours coûte 15 euros, et une offre *premium*, avec un abonnement mensuel de 42 euros, dans laquelle chaque cours coûte $7{,}50$ euros. À partir de quel nombre de cours mensuel est-il rentable de souscrire à l'offre premium ?

9 Un carré de côté 3 cm est découpé de la manière suivante. Quel pourcentage de l'aire est colorié ?



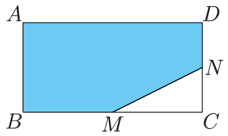
10 Anna, Emma et Léa lisent à tour de rôle les 231 pages d'un roman : tous les soirs, elles lisent 20 pages, en changeant de lectrice à chaque page, dans l'ordre Anna, Emma, Léa. Anna a manqué la première séance : ce soir-là, Emma et Léa ont commencé la lecture à deux, alors qu'Anna a rattrapé son retard, seule. Combien de pages a lu Anna en tout ?

11

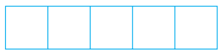
12

13 Trouver le nombre en centième position de la suite suivante : $1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, \ldots$

14 Dans le rectangle $ABCD$, M est le milieu de $[BC]$ et N le milieu de CD. Si $CN = 4$ cm et $MC = 5$ cm, quel pourcentage de l'aire est colorié ?



15 On souhaite colorier les cases du tableau en vert, rouge et bleu, de telle sorte que deux cases contiguës ne soient pas de la même couleur. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?



16 En écrivant trois fois de suite l'âge de Victor, on obtient un nombre à six chiffres, égal au produit de son âge, de celui de sa femme, et de ceux, tous différents, de leurs quatre filles. Quel est l'âge de son aînée ?

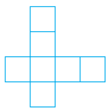
17 Trois nombres premiers p, q et r sont tels que leur somme soit paire. Déterminer la valeur de $pqr - 2(pq+qr+rp) + 4(p+q+r)$.

18

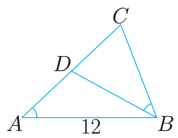
19

20 Quatre footballeurs se rejettent la paternité d'un but. Kylian dit que l'auteur du but est Antoine. Antoine dit qu'il s'agit d'Éden, mais Éden accuse en réponse Antoine de mentir. Enfin, Léo jure ne pas avoir mis le but. En sachant que seul l'un des quatre dit la vérité, qui est l'auteur du but ?

21 Placer les nombres de 2 à 8 dans les cases du tableau suivant, de telle sorte à ce que la somme des nombres placés dans la ligne et celle des nombres placés dans la colonne vaillent 21.



22 Si D est le milieu de $[AC]$, les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux, et la longueur AB vaut 12 cm. Combien vaut le carré de la longueur BD ?



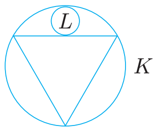
23 Un dé magique a les nombres $1, 2, 3, 4, 6$ et 8 sur ses faces. Après chaque lancer, les faces changent : si un nombre pair vient de sortir, tous les nombres pairs sont divisés par 2 ; si c'est un nombre impair, les nombres impairs sont multipliés par 2. Quelle est la probabilité d'obtenir un "2" au second lancer (juste avant que les numéros ne rechangent) ?

24 Déterminer les cinq nombres entiers tels que les sommes de ces entiers pris deux par deux soient $0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13$ et 15.

25

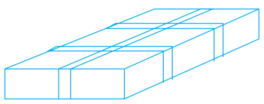
26

27 Un triangle équilatéral est inscrit dans le cercle K. Sachant que le cercle L est le plus grand possible, combien vaut le rapport du rayon de K sur celui de L ?

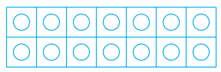


28 Une fourmi se trouve au sommet d'un cube. Elle souhaite se promener sur les arêtes du cube de telle sorte que trois arêtes parcourues consécutivement ne se trouvent jamais sur une même face. Combien d'arêtes parcourra-t-elle avant de se retrouver à son point de départ ?

29 Un paquet-cadeau a pour dimensions $10 \times 20 \times 30$ cm. On l'entoure de rubans comme indiqué sur la figure. De quelle longueur de ruban a-t-on besoin ?

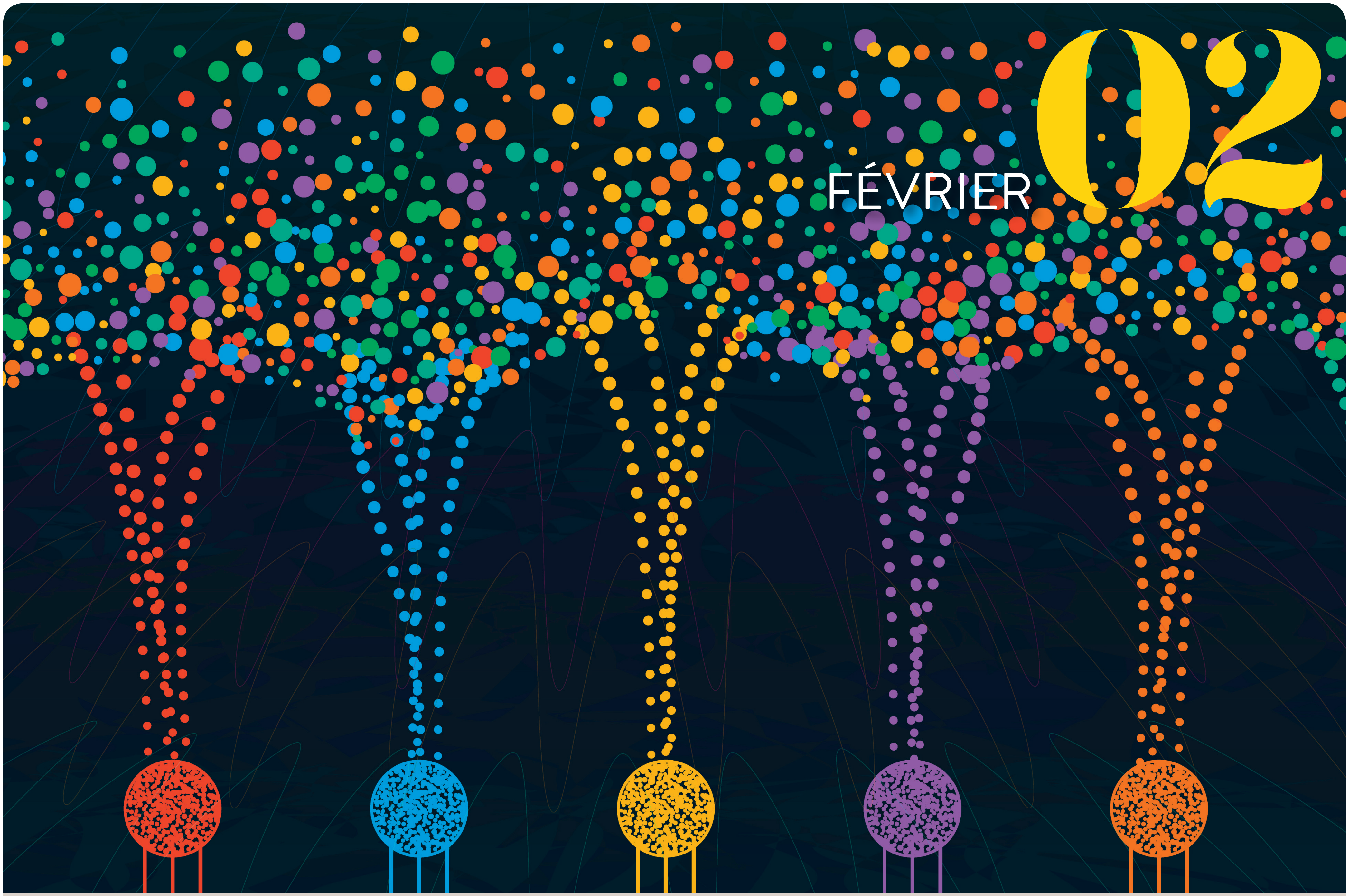


30 Le but d'un jeu est de faire disparaître des jetons placés sur un damier 2×7. Pour un euro, on peut enlever un jeton. Pour trois euros, on peut enlever un jeton et ses voisins (horizontalement ou verticalement). Combien doit-on payer au minimum pour enlever tous les jetons ?



31 Pour obtenir un nombre le plus grand possible, vaut-il mieux ajouter tous les entiers de 1000 à 9999 dont tous les chiffres sont pairs, ou ceux dont tous les chiffres sont impairs ?

Inria



ÇA VA ÊTRE LONG ?

Si vous installez parfois des logiciels, vous avez forcément remarqué que la petite barre qui vous indique le temps restant est franchement mensongère. Elle semble avancer à sa guise, sans aucun rapport avec le moment écoulé, ou restant à écouler, etc. Connaître le temps qu'un programme met à s'exécuter, ce n'est pourtant pas beaucoup demander ! En fait, si. Et en gros, à la louche, à peu près, en moyenne ? Même. Connaître le temps d'exécution d'un algorithme est un problème difficile – souvent insoluble en l'état actuel des connaissances. Bien souvent, on donne la complexité dans le pire des cas d'un algorithme, c'est-à-dire le temps de calcul théorique d'un algorithme sur la pire entrée possible, celle qui lui prendra le plus de temps à s'exécuter. On s'intéresse aussi beaucoup au temps de calcul en moyenne sur toutes les entrées possibles, qui est encore plus difficile à calculer.

Parmi les algorithmes les plus étudiés, on trouve les algorithmes de tri, qui partent d'une suite d'objets non triés et s'occupent de la ranger dans un ordre bien défini. Il en existe de nombreux, aux noms poétiques : tri à bulles, tri par insertion, tri rapide, etc. C'est une des rares familles d'algorithmes dont on connaît bien le temps théorique d'exécution, que ce soit dans le pire des cas ou en moyenne. Le tri par sélection, par exemple, fonctionne de manière très simple : on cherche la plus petite valeur à trier et on la met devant. Puis on cherche la seconde plus petite dans ce qui reste, et on la met en second, etc. Simple, mais pas terrible en complexité ! Pour n valeurs à trier, il faut lire une fois toutes les données pour trouver la plus petite valeur, ce qui coûte n opérations. Au total, on a de l'ordre de n^2 opérations à faire dans le pire des cas comme en moyenne.

Le tri rapide, ou *quicksort*, est plus compliqué à comprendre, mais plus efficace : on choisit arbitrairement une valeur dans les données à trier et on met d'un côté toutes les valeurs plus petites, de l'autre toutes les plus grandes. Ça semble farfelu, c'est pourtant très astucieux : on se retrouve avec deux suites de données beaucoup plus petites à trier ! Et on reprend sur ces deux suites. La complexité passe à $n*log(n)$, ce qui représente un gain significatif en temps de calcul.

En général, on connaît la complexité dans le pire des cas de beaucoup d'algorithmes courants, beaucoup plus rarement la complexité en moyenne. Il reste beaucoup à apprendre.

lun mar mer jeu ven sam dim

1

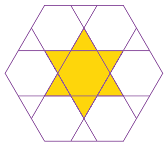
2

3

Sur une horloge, la somme de trois nombres consécutifs est toujours un multiple de 3. Réordonner les nombres de telle sorte que la somme de trois nombres consécutifs ne soit jamais un multiple de 3.

4

Chaque côté de l'hexagone est découpé en trois parties égales. Quelle est la proportion de l'aire de l'hexagone qui est coloriée ?



5

Si l'on écrit à l'envers le nombre 123, on obtient 321, qui est plus grand. En revanche, le nombre 121 ne change pas. Combien de nombres de trois chiffres ont la propriété qu'ils augmentent (strictement) quand on les écrit à l'envers ?

6

À un examen, Susie a obtenu moins de points que Marie ; Laurie moins de points que Lucie ; Noémie autant que Rosie ; Susie plus que Sophie ; Laurie autant que Marie et Noémie plus que Lucie. Qui a obtenu la plus mauvaise note ?

7

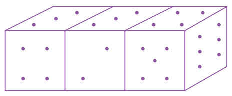
Si on ajoute à un nombre de deux chiffres le carré de la somme de ses chiffres, on obtient le nombre original, une fois échangés ses deux chiffres. Quelle est la somme de tous les nombres qui vérifient cette condition ?

8

9

10

Trois dés spéciaux mais identiques sont posés sur une table. Sachant que les faces qui se touchent portent le même numéro, déterminer la face à gauche du dé de gauche.



11

Déterminer le nombre de solutions (en entiers strictement positifs) de l'équation

$$x^2y^3 = 6^{12}.$$

12

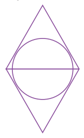
Sans utiliser de calculatrice, classer les fractions

$$\frac{1000}{1001}, \frac{2000}{2003}, \frac{3000}{3005}, \frac{4000}{4007}, \frac{5000}{5009}$$

de la plus petite à la plus grande. Laquelle est la plus grande ?

13

Le cercle est tangent aux deux triangles équilatéraux. Sachant que le côté de chaque triangle mesure 1 cm, quel est le rayon du cercle ?



14

Si

$$\sqrt{x-9} - \sqrt{x-16} = 1,$$

combien vaut x ?

15

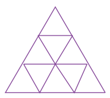
16

17

Combien de nombres à quatre chiffres ont à la fois le nombre 1 comme chiffre des milliers et au moins trois chiffres égaux ?

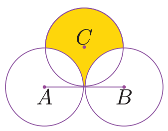
18

On trace un triangle découpé en "étages" (la figure correspond au cas de trois étages). Sachant que le côté de chaque petit triangle mesure 1 m et que notre stylo contient 100 m d'encre, combien d'étages peut-on faire au maximum ?



19

Les trois cercles ont un rayon de 1 cm. Sachant que le cercle de centre C est tangent au segment $[AB]$ en son milieu, combien mesure l'aire coloriée ?



20

Après la guerre, le roi répartit son butin de $44\,100$ pièces d'or. Il en fait des piles de 1, 3, 5, 7, etc. pièces. L'officier qui s'est le moins bravement battu empoche la première pile, le suivant les deux suivantes, puis le troisième les trois suivantes, etc. Combien d'officiers seront ainsi récompensés ?

21

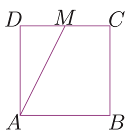
Une urne contient un jeton rouge, deux verts, trois jaunes et quatre bleus. Un joueur va piocher des jetons de l'urne, sans remise. Combien de tirages doit-il réaliser au minimum pour être sûr d'obtenir au moins trois couleurs différentes ?

22

23

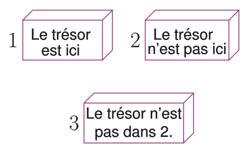
24

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré, et M est le milieu du côté $[DC]$. Sachant que l'aire du triangle AMD vaut 4 m^2, quelle est l'aire du carré ?



25

Un seul des coffres contient un trésor, et une seule des inscriptions est fausse. Trouvez le trésor !



26

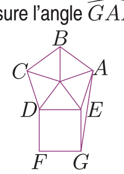
Jean dispose de 40 kg de pommes à $3{,}3$ euros le kilo et 50 kg de poires à $2{,}5$ euros le kilo. S'il souhaite faire des paniers qui contiennent chacun 6 kg de pommes, combien doit-il rajouter de poires pour arriver à un mélange coûtant $3{,}1$ euros le kilo ?

27

Anne dit que son âge est de 50 ans, 50 mois, 50 semaines et 50 jours. Quel âge aura-t-elle à son prochain anniversaire ?

28

Sachant que $ABCDE$ est un pentagone régulier et que $DFGE$ est un carré, combien mesure l'angle $\widehat{GAE}$?

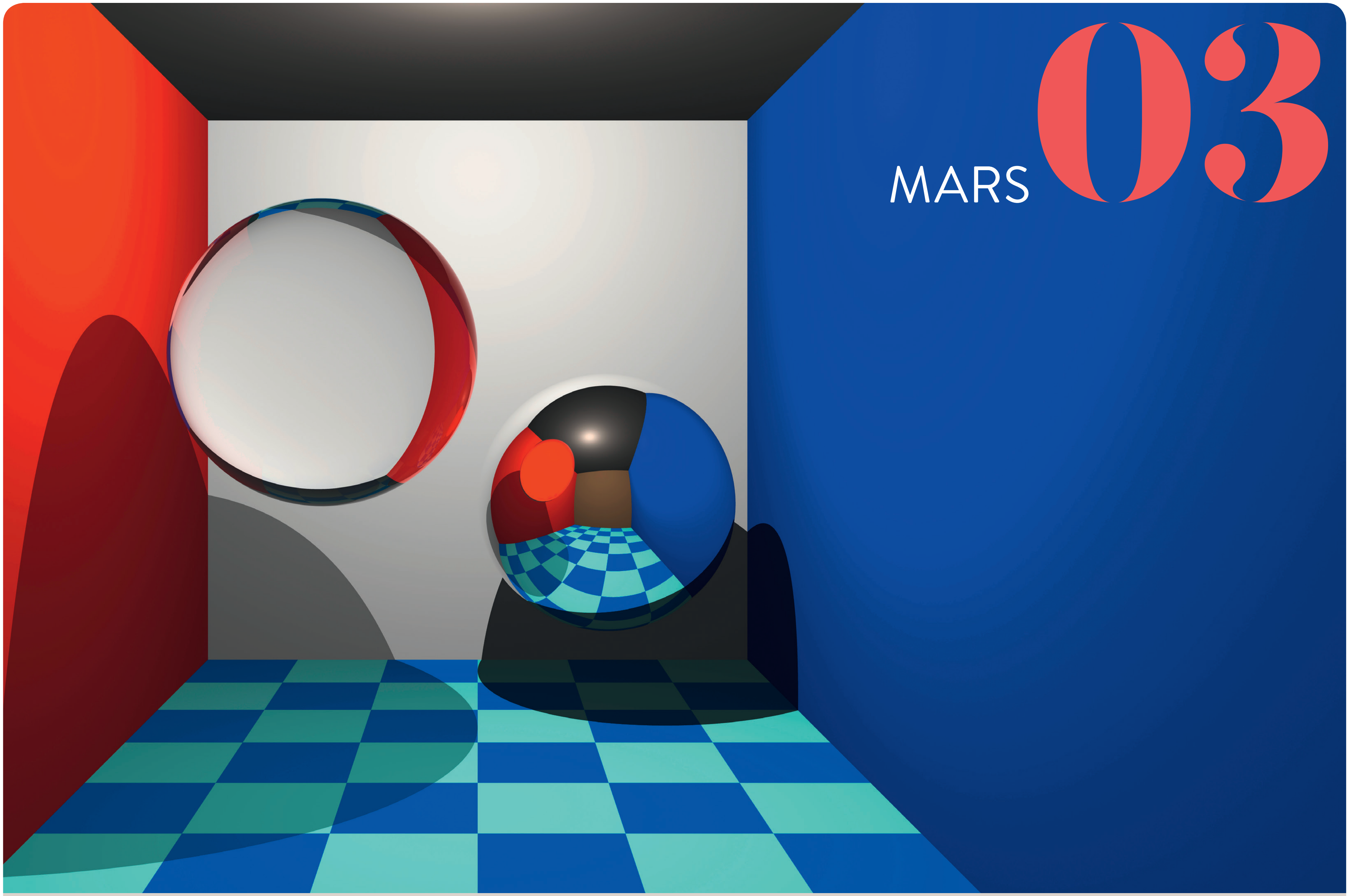


29

LABEX IRMIA Institut de recherche en mathématiques, interactions et applications

UFR de mathématique et d'informatique Université de Strasbourg

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée



DESSINE-MOI UN ALGORITHME

Jusqu'à la fin du siècle dernier, le traitement d'images faisait appel à des lentilles, des filtres, des bancs de marbre, etc. Et puis les images sont devenues numériques, ouvrant la porte aux traitements algorithmiques de plus en plus puissants. Nous nous baladons avec des téléphones qui prennent des photos avec des millions de pixels et réalisent des traitements logiciels qui auraient fait pâlir d'envie les professionnels du traitement d'image de la fin du siècle dernier. Un téléphone intelligent offre une énorme gamme de fonctionnalités depuis la mise au point automatique jusqu'à la reconnaissance de visage. Ces mêmes téléphones vont bientôt nous ouvrir à des mondes nouveaux de réalités virtuelles ou augmentées. Tout cela s'appuie sur des algorithmes de géométrie.

Considérons une version très simplifiée d'un tel algorithme : le *ray tracing*. On dispose du modèle d'un monde en trois dimensions et on aimerait construire une vue de ce monde depuis un point particulier, censé représenter un œil, un appareil photo. Intuitivement, on lance un rayon depuis ce point de vue et on cherche quand et où ce rayon rencontrera un objet du modèle 3D. Le *ray tracing* permet de dessiner ce que l'on voit à partir de ce point de vue. Une balle devient un rond et un objet derrière la balle n'est représenté que partiellement, le point de vue ne voit pas la partie cachée par la balle.

Dans le modèle 3D, on peut représenter un objet par un petit triangle, un carré, ou un parallélépipède. Pour calculer le point d'intersection d'une ligne droite avec de tels objets, il suffit de résoudre des équations vectorielles. Pour réaliser le *ray tracing*, on a donc à effectuer un très grand nombre de calculs. Comme les calculs pour chaque point de l'image peuvent être faits indépendamment, on peut les réaliser en parallèle. Ces applications graphiques ont d'ailleurs conduit à de superavancées pour des processeurs massivement parallèles.

Avec cet algorithme, on peut calculer l'objet visible en chaque point. On peut alors lancer des rayons depuis chaque point d'impact vers les sources de lumière pour déterminer sa luminosité. Observez que, dans le monde réel, les rayons lumineux vont de la source de lumière vers le point de vue. Ici, on “remonte” le chemin des rayons jusqu'à la source de lumière.

lun mar mer jeu ven sam dim

1

2 Dans un sac il y a deux sortes de fruits et au total il y a 24 fruits. S'il y a six poires de plus que de pommes, quel est le rapport entre le nombre de poires et le nombre de pommes ?

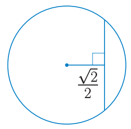
....

3 Des villages A, B, C, D et E se trouvent le long d'une route. Le tableau indique la distance entre chacun d'eux. Quel est l'ordre de ces villages le long de la route ?

	A	B	C	D	E
A	0	3	3	1	6
B	3	0	6	2	3
C	3	6	0	4	9
D	1	2	4	0	5
E	6	3	9	5	0

....

4 Une droite est tracée à une distance de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm du centre d'un cercle de rayon 1 cm, et divise ce cercle en deux parties. Quelle est l'aire de la partie la plus petite ?



....

5 Le produit de trois entiers positifs est égal à trois fois la somme de ces entiers. Combien de triplets de nombres entiers positifs vérifient cette propriété ?

....

6 Une amibe est un être vivant unicellulaire, qui se reproduit en se divisant en deux exactement chaque minute. Si deux amibes placées dans un tube à essai peuvent remplir complètement le tube en deux heures, combien de temps faudra-t-il à une seule amibe pour remplir un tube à essai de même capacité ?

....

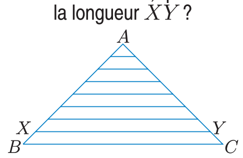
7

8

9 Soit n un nombre entier, et m le nombre entier que l'on obtient lorsqu'on enlève à n son chiffre des unités. Si $n - m = 2020$, quelle est la valeur de n ?

....

10 Le triangle ABC est isocèle en A et les segments divisent $[AB]$ et $[AC]$ en parties égales. Si $BC = 40$ cm, que vaut la longueur XY ?



....

11 Après avoir joué 500 parties de solitaire, j'ai gagné dans $49\,\%$ des cas. Supposons qu'à partir de maintenant, je gagne toutes les parties suivantes. Combien de parties dois-je jouer pour que mon pourcentage de victoires soit de $50\,\%$?

....

12 Michel, Fabien et Jean participent à un marathon. Au départ, Michel était devant, et derrière lui dans l'ordre il y avait Fabien puis Jean. Pendant la course, Michel et Fabien se sont dépassés neuf fois. Fabien et Jean se sont dépassés dix fois, et Michel et Jean se sont dépassés onze fois. Dans quel ordre terminent-ils le marathon ?

....

13 Sur les neuf cartes de Sophie sont écrits les premiers nombres premiers à deux chiffres. Sophie aimerait ranger ses cartes en ligne de façon à ce que la différence entre les nombres inscrits sur deux cartes voisines soit une puissance de 2. Combien existe-t-il de rangements différents ?

....

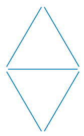
14

15

16 Il faut trouver un nombre inconnu avec les indices suivants : les chiffres du nombre sont $0, 2, 4, 6, 8$ sans répétition. Le premier chiffre est un tiers du cinquième. Le deuxième chiffre est le plus petit de tous et le quatrième chiffre est le produit du premier et du troisième. Quel est ce nombre inconnu ?

....

17 Dans la figure cinq allumettes forment deux triangles. Si l'on dispose de 21 allumettes, comment peut-on former trois carrés et sept triangles ?

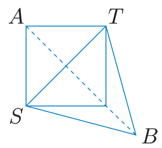


....

18 Si 20 caisses de papayes pèsent 800 kg, et chaque caisse vide pèse un demi-kilogramme, combien pèsent toutes les papayes au total ?

....

19 Le point B est sur la diagonale d'un carré de côté 2 cm de sorte que le triangle SBT soit équilatéral. Déterminer la longueur AB.



....

20 Si on continue cette suite de symboles, quels seront les symboles en positions 100 et 101 de la suite ?

$\heartsuit \diamondsuit \heartsuit \clubsuit \heartsuit \spadesuit \heartsuit \diamondsuit \heartsuit \clubsuit \heartsuit \spadesuit \ldots$

....

21

22

23 Supposons que x_1, x_2, x_3 et x_4 soient des nombres qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 &= 8 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 &= 23. \end{aligned}$$

Quelle est alors la valeur de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

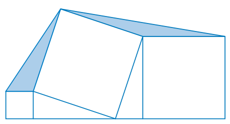
....

24 Déterminer la moyenne entre les nombres suivants :

$$\frac{1+2+3}{3}, \frac{2+3+4}{3}, \frac{3+4+5}{3}, \ldots, \frac{998+999+1000}{3}.$$

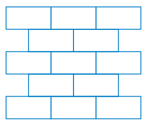
....

25 Trois carrés sont disposés comme le montre la figure ci-dessous. Les aires des triangles colorés sont-elles égales ?



....

26 Sur cette figure est représenté un mur à cinq niveaux construit avec 13 briques. Combien de briques faut-il pour construire un mur sur le même modèle mais à 100 niveaux ?



....

27 Trouver tous les nombres entiers positifs à quatre chiffres, qui sont égaux au cube de la somme des chiffres qui les constituent.

....

28

29

30 Dans un rectangle $PQRS$, le rapport entre les angles $\widehat{PSQ}$ et $\widehat{PQS}$ est de $\frac{1}{5}$. Combien mesure l'angle $\widehat{RSQ}$?

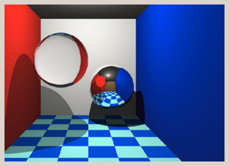
....

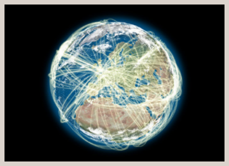
31 D'un côté d'une rue se trouvent les maisons $1, 3, 5, 7$ en face desquelles se trouvent respectivement les maisons $2, 4, 6, 8$. Le facteur visite toutes les maisons en commençant par la 1, en traversant la rue entre chaque maison et sans aller à la maison située directement en face. De combien de manières différentes peut-il réaliser son parcours ?

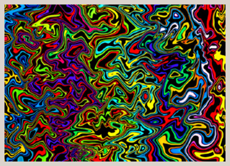
....

CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS







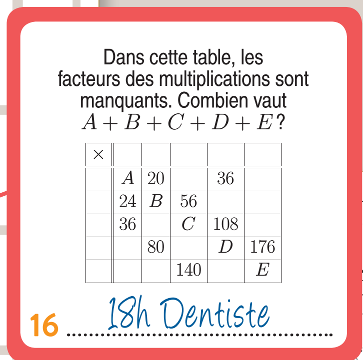


Toute une année pour faire travailler vos méninges et explorer le monde des algorithmes, essentiels au fonctionnement des machines et des réseaux.

- Mois après mois, découvrez en texte et en image ce qu'est un algorithme, et ceux particulièrement emblématiques de l'informatique.
- Jour après jour, excepté les week-ends, résolvez les exercices et les énigmes élaborés par une équipe de spécialistes.

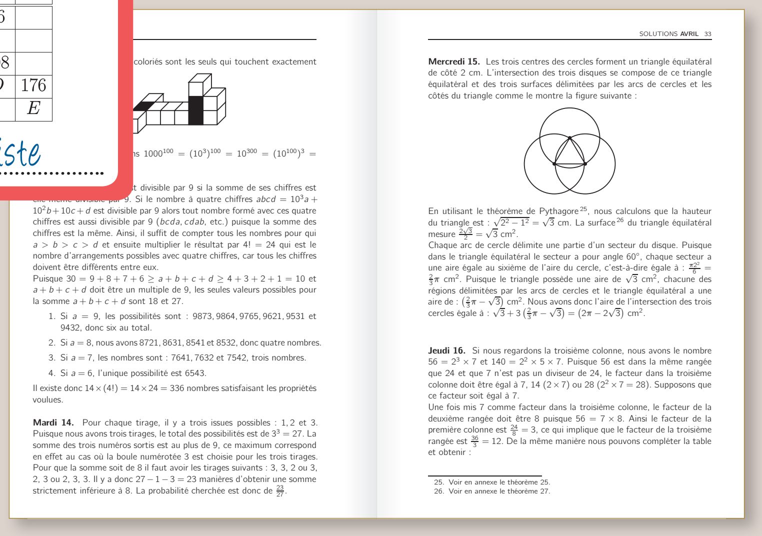
Deux niveaux de réponses font de ce calendrier un ouvrage stimulant : le défi journalier trouve sa solution en dernière page, et une explication détaillée des solutions est proposée dans le livret.

262 QUESTIONS



×					
	A	20		36	
	24	B	56		
	36		C	108	
		80		D	176
			140		E

262 RÉPONSES



Pratiquer les maths n'a jamais été aussi ludique !

AVEC LE SOUTIEN DE

FONDATION BLAISE PASCAL

Sous la direction de Ana Rechtman Bulajich
avec la collaboration de Nicolas Hussenot
Textes d'ouverture mensuels : Serge Abiteboul
et Charlotte Truchet
Questions et réponses : Anne Alberro Semerena,
Radmila Bulajich Manfrino, Marco Antonio Figueroa Ibarra,
Ana Rechtman Bulajich et Rogelio Valdez Delgado

PUG

Prix France TTC : 18 €
ISBN : 978-2-7061-4274-1