CALENDRIER MATHÉMATIQUE 2024

Maths pour la planète Terre

DEUX PARCOURS COLLÈGE ET LE DÉFI DU MOIS POUR LES INSATIABLES !

MESURER ET REPRÉSENTER LA BIODIVERSITÉ

La biodiversité – ou diversité biologique – est le tissu vivant de notre planète. Elle provient d'une longue évolution du monde vivant sur Terre, depuis les organismes pionniers présents il y a 3,5 milliards d'années. Cette notion recouvre l'ensemble des milieux naturels, des formes de vie – plantes, animaux, champignons, bactéries… – et de leurs interactions. Les moyens de mesurer la biodiversité sont variés et ont évolué avec le temps. Les grandes expéditions scientifiques du XVIII[e] siècle ont permis la classification systématique d'un grand nombre d'espèces. De nos jours, l'observation s'automatise avec des caméras à vision diurne ou nocturne, équipées de détecteurs de mouvement. Pour collecter des données sur la biodiversité, de nombreux chercheurs font aussi appel à des plateformes de science participative comme e-phytia, lancée par l'Inrae (Institut national de recherche pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement). Les données fournies par ces nouveaux types de détection ne peuvent être exploitées que grâce aux avancées récentes en informatique et en mathématiques. En effet, elles représentent une énorme quantité d'informations qui doivent être triées et traitées par divers outils, comme des algorithmes de détection d'image ou des analyses statistiques.

La détection et la surveillance de la biodiversité ne s'arrêtent pas aux espèces visibles. Grâce à l'ADN environnemental laissé par les êtres vivants – par exemple dans l'eau, le sol ou la glace –, les chercheurs sont désormais capables d'identifier les espèces présentes dans ces environnements à l'aide de seuls prélèvements. Là encore, des modèles mathématiques et statistiques d'appariement sont indispensables pour faire le lien entre ADN et espèces.

L'étude de la biodiversité passe également par l'analyse des interactions entre les différentes espèces. L'écologue anglais Charles Elton a, le premier, utilisé la théorie des graphes pour représenter les réseaux trophiques, qui décrivent l'ensemble des relations alimentaires entre organismes d'un même écosystème. Chaque organisme ou espèce est représenté par un nœud dans un graphe dont les arêtes correspondent à une relation entre ces individus. L'orientation des arêtes indique qui mange qui ou qui tire profit de qui. Ce formalisme mathématique permet d'une part de visualiser ces réseaux et, d'autre part, de récupérer des informations sur la structure du réseau trophique, comme les espèces indispensables à son fonctionnement, ainsi que les flux de biomasse, de carbone ou d'azote.

LUNDI	MARDI	MERCREDI	JEUDI	VENDREDI	SAM	DIM

1

Dans un triangle ABC, l'angle en B mesure $90°$. Soient E et F les points de l'hypoténuse $[AC]$ tels que $AE = AB$ et $CF = BC$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EBF}$.

2

Dans chaque ligne et chaque colonne, les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 doivent apparaître exactement une fois. En déduire la valeur de x.

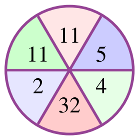
1	2			
				1
	x	4		
2		5		
	5			4

3

4

5

Dans le dessin ci-dessous, les nombres occupant des secteurs oppposés sont liés par une même relation. Laquelle ?



6

Soit ABC un triangle rectangle en A possédant un angle de $60°$. Si l'hypoténuse mesure $4\,\text{cm}$, quelle est la distance entre A et le point d'intersection des bissectrices ?

7

À une certaine heure de la journée, un poteau téléphonique de $9\,\text{m}$ de haut projette au sol une ombre de $3\,\text{m}$ de long. À la même heure de la journée, quelle hauteur doit mesurer un arbre pour projeter une ombre de $9\,\text{m}$ de long ?

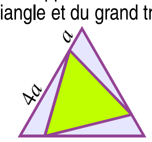
8

Trouver tous les entiers a et b qui satisfont l'équation

$$b^2 - 3 = a \times (3b - 6).$$

9

On divise chaque côté d'un triangle équilatéral comme dans la figure ci-dessous, de sorte que la grande partie mesure quatre fois la petite. Quel est le rapport entre les aires du petit triangle et du grand triangle ?



10

11

12

Dans un magasin, 360 oranges n'ont pas été vendues, ce qui correspond à $12\,\%$ du nombre total d'oranges proposées à la vente. Combien d'oranges ont été vendues ?

13

Combien de valeurs entières distinctes peut prendre l'expression

$$\frac{100}{2n-1}$$

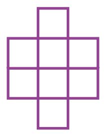
lorsque n parcourt l'ensemble des entiers strictement positifs ?

14

On considère tous les nombres à six chiffres qui peuvent s'écrire en utilisant une fois et une seule chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Parmi ces nombres, combien sont des multiples de 6 ?

15

Placer les nombres $1, 2, \ldots, 7$ et 8 de telle sorte que deux nombres consécutifs ne se touchent ni horizontalement, ni verticalement, ni en diagonale.



16

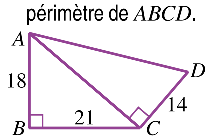
Quelle est la somme des chiffres du produit 999999×666666 ?

17

18

19

Dans le quadrilatère $ABCD$, l'angle en B est droit, la diagonale (AC) est perpendiculaire à (CD), $AB = 18\,\text{cm}$, $BC = 21\,\text{cm}$ et $CD = 14\,\text{cm}$. Calculer le périmètre de $ABCD$.



20

Entre 1 et 2024, ces deux nombres inclus, combien d'entiers peuvent s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ?

21

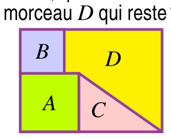
Les épouses de Ben, Issa et Tao sont Léa, Aimée et Mira. Chaque couple a un fils, dont les noms sont Alex, Naël et Victor. Tao n'est ni le mari de Léa ni le père de Naël. Aimée n'est ni l'épouse d'Issa ni la mère d'Alex. Si le père d'Alex est Issa ou Tao, alors Léa est la mère de Victor. Si Léa est l'épouse d'Issa, Mira n'est pas la mère d'Alex. Trouvez les membres de chaque famille.

22

Déterminer tous les entiers positifs n tels que $n^2 - 19n + 99$ soit un carré parfait.

23

On coupe une feuille rectangulaire en quatre morceaux. Si A est un carré d'aire $144\,\text{cm}^2$, B un carré d'aire $81\,\text{cm}^2$ et C a pour aire $102\,\text{cm}^2$, quelle est l'aire du morceau D qui reste ?



24

25

26

Déterminer le plus petit entier strictement positif k tel que

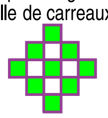
$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2$$

soit un multiple de 100, sachant que pour tout entier k,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

27

La plus longue ligne de la mosaïque ci-dessous mesure 5 carreaux. Une autre mosaïque de même forme commence par un carreau de couleur et a 23 carreaux dans sa rangée la plus longue. Combien contient-elle de carreaux blancs ?



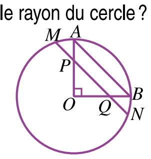
28

Quel est le dernier chiffre de

$$2^{2024} - 2\,?$$

29

Les rayons $[AO]$ et $[OB]$ sont perpendiculaires, (MN) est parallèle à (AB), $MP = \sqrt{56}\,\text{cm}$ et $PN = 12\,\text{cm}$. Combien mesure le rayon du cercle ?



30

Neuf nombres sont écrits dans l'ordre croissant. Le nombre du milieu est également la moyenne des neuf nombres. Si la moyenne des cinq plus grands nombres est 68 et si la moyenne des cinq plus petits est 44, quelle est la somme de tous les nombres ?

31

Parcours collège 6ᵉ-5ᵉ — Parcours collège 4ᵉ-3ᵉ — Défi du mois

Pratiquer les maths n'a jamais été aussi ludique !

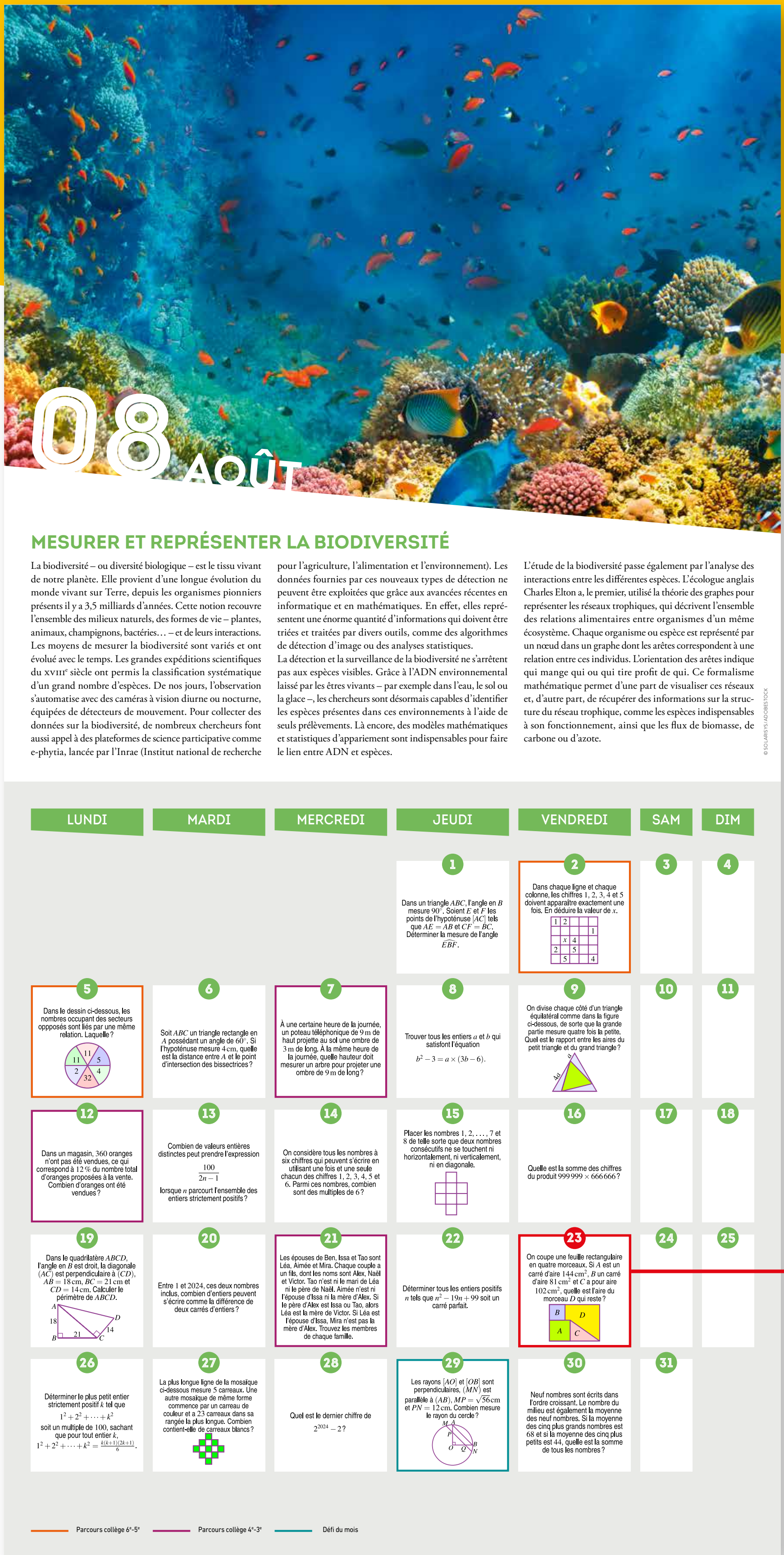










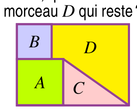
Les problématiques environnementales et socio-économiques obligent à analyser, optimiser et gérer des systèmes toujours plus complexes nécessitant un besoin croissant en mathématiques et des interactions entre disciplines de plus en plus poussées.

- **Mois après mois,** de janvier à décembre, vous découvrirez, à travers 12 textes superbement illustrés, le rôle des mathématiques et leurs liens avec d'autres domaines scientifiques dans une grande diversité de sujets environnementaux, de l'analyse des déplacements des loups à la gestion durable de la pêche.
- **Jour après jour, excepté les week-ends,** des exercices et des énigmes sont proposés sous forme de défis quotidiens.
- **Les solutions** sont indiquées en dernière page du calendrier et **leurs explications détaillées** exposées dans le livret offert.

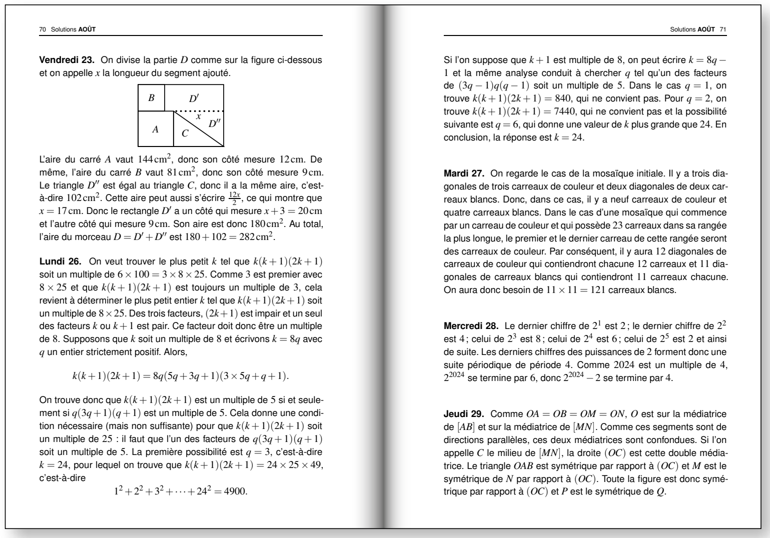
260 QUESTIONS

23

On coupe une feuille rectangulaire en quatre morceaux. Si A est un carré d'aire $144\,\text{cm}^2$, B un carré d'aire $81\,\text{cm}^2$ et C a pour aire $102\,\text{cm}^2$, quelle est l'aire du morceau D qui reste ?



260 RÉPONSES



Sous la direction scientifique de Romain Joly **| Textes d'ouverture mensuels :** Didier Bresch et Jimmy Garnier **| Défis et solutions :** Anne Alberro Semerena, Radmila Bulajich Manfrino, Ana Rechtman Bulajich, Carlos Jacob Rubio Barrios et Rogelio Valdez Delgado.

AVEC LE SOUTIEN DE
FONDATION BLAISE PASCAL
iMPT

9 782706 153631

CALENDRIER MATHÉMATIQUE 2024

Maths pour la planète Terre

OFFERT

LIVRET DES RÉPONSES

Un défi par jour
pour faire travailler vos méninges

PUG

TEXTES MENSUELS

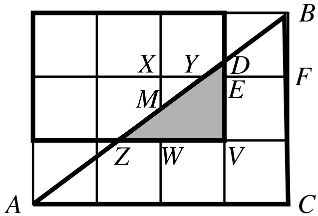
Les mathématiques sont une discipline fondamentale au cœur d'importants enjeux sociétaux et environnementaux liés à la complexité de la Terre. Le développement et l'utilisation de nouveaux modèles et techniques mathématiques, en interactions avec d'autres disciplines scientifiques comme l'océanographie, la climatologie, la biologie ou les sciences humaines, sont des clés pour relever ces défis de recherche et de gestion durable. Ils ouvrent à une meilleure compréhension des phénomènes étudiés et aident la prise de décision par les acteurs de la société civile. En outre, ces interactions nourrissent les mathématiques en favorisant l'émergence de nouvelles théories, potentiellement utiles à de futurs défis.
À travers les douze textes mensuels, vous découvrirez le rôle des mathématiques dans l'étude des effets des changements environnementaux, des comportements collectifs et de la biodiversité.

Didier Bresch est directeur de recherche CNRS à l'Université Savoie Mont Blanc, spécialiste en équations aux dérivées partielles avec applications en mécanique des fluides et en géophysique. Il est convaincu comme beaucoup de scientifiques de la nécessité d'une mobilisation collective d'ampleur au service de l'environnement. L'Institut des Mathématiques pour la Planète Terre est notamment né en mars 2021 de l'Atelier de Réflexion Prospective « Mathématiques en Interaction pour la Terre » dont il a été responsable.

Jimmy Garnier est chargé de recherche CNRS à l'Université Savoie Mont Blanc, spécialiste en équations aux dérivées partielles avec applications en écologie et en évolution. Il a collaboré avec Rebecca Tyson (Université British Columbia, Canada) dans le cadre du programme « Make our planet great again » et a publié des articles scientifiques et grand public pour sensibiliser à l'impact écologique des accords de Paris sur le climat.

Mercredi 10. Si $b = 3a$ et $c = 2b$, alors $c = 2 \times 3a = 6a$. Ainsi, $a+b+c = a+3a+6a = 10a$.

Jeudi 11. Sur la figure ci-dessous, la diagonale $[AB]$ coupe le segment $[XW]$ en son milieu M, et les triangles MZW et MYX sont égaux puisqu'ils ont un côté de même longueur et trois angles égaux. Leurs aires sont donc égales. Ainsi, l'aire de la surface colorée est égale à l'aire du carré $XWVE$ à laquelle on additionne l'aire du triangle YED. Il nous reste donc à calculer l'aire de ce triangle YED. Comme le triangle BYF est semblable[27] au triangle BAC avec un coefficient de réduction de $\frac{1}{3}$, on a $1+YE = \frac{4}{3}$, d'où $YE = \frac{1}{3}\,\text{cm}$. Puis, comme les triangles YED et YBF sont semblables, on a $\frac{DE}{BF} = \frac{YE}{YF}$ soit $DE = \frac{1}{4}\,\text{cm}$. Ainsi, l'aire de YED est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}\,\text{cm}^2$ et l'aire de la surface colorée vaut $1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}\,\text{cm}^2$.



Vendredi 12. On sait que les nombres $a-b$ et $c-d$ sont positifs, donc

$$0 < (a-b)(c-d) = ac+bd-(ad+bc).$$

Ainsi $ac+bd > ad+bc$.

Lundi 15. Si $n = 1013$, on a $2^{2024} + 2^{1013} + 1 = (2^{1012}+1)^2$. Si $n < 1013$, on a :

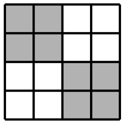
$$(2^{1012})^2 < 2^{2024} + 2^n + 1 < 2^{2024} + 2^{1013} + 1 = (2^{1012}+1)^2.$$

Donc, pour les valeurs entières de n telles que $n < 1013$, le nombre $2^{2024} + 2^n + 1$ est strictement compris entre les carrés de deux entiers

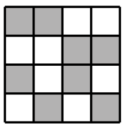
27. Voir en annexe le théorème 26.

consécutifs et n'est donc pas un carré. Ainsi, la plus petite valeur de n permettant que le nombre soit un carré parfait est $n = 1013$.

Mardi 16. On a $\binom{4}{2} = 6$ manières[28] de colorier deux cases en noir dans la première ligne. Séparons alors les cas.
1. Les cases que noires dans la deuxième ligne se trouvent dans les mêmes colonnes que celles de la première ligne. Dans ce cas, une fois choisies les cases noires de la première ligne, celles de la deuxième sont fixées et il ne reste qu'une possibilité pour les cases noires des deux dernières lignes. Par exemple :



2. Les cases noires de la deuxième ligne se trouvent toutes les deux dans des colonnes différentes de celles de la première ligne. Dans ce cas, une fois choisies les cases noires de la première ligne, il n'y a qu'une manière de colorier les cases noires de la deuxième ligne. Il reste ensuite $\binom{4}{2} = 6$ manières de choisir les cases noires de la troisième ligne, et les cases noires de la quatrième ligne sont alors déjà déterminées. Par exemple :



3. Exactement une case noire de la deuxième ligne se trouve dans la même colonne qu'une case noire de la première. Dans ce cas, on a deux possibilités pour le choix de la colonne qui sera commune avec une case noire de la première ligne, puis deux possibilités pour colorier la case noire qui sera dans une colonne distincte. Il y a donc quatre manières de colorier la deuxième ligne. Quel que soit le

28. Voir en annexe le théorème 13.