Table des matières

Première partie

Calcul des probabilités, variables aléatoires, lois usuelles

Les méthodes et les techniques exposées en statistiques descriptives permettent des comparaisons d'observations statistiques et à ce titre elles ont leur utilité dans l'entreprise pour aider à la prise de décision. Elles ont aussi leurs limites : toute gestion prévisionnelle de stocks, de production, de clientèle, etc., nécessite de mettre en place des « modèles » statistiques pour représenter les phénomènes étudiés.

La définition de ces lois théoriques repose sur la notion de probabilité : le calcul des probabilités, développé dans le 1er chapitre avant que ne soient répertoriées ensuite les lois les plus usuelles, peut être considéré comme un outil de base permettant de mieux « contrôler » le hasard.

Historiquement, c'est au XVIIe siècle qu'est née la théorie des probabilités : les bases du calcul des probabilités ont été définies à partir de problèmes de jeux de hasard posés à des mathématiciens, dont Pascal, par des joueurs comme le Chevalier de Méré.

Par la suite la théorie s'est développée dans un cadre beaucoup plus large grâce à des mathématiciens comme Bernoulli, Laplace, Gauss… pour ne citer que ceux dont nous retrouverons les noms dans les pages qui suivent.

Chapitre I

♦

Généralités sur le calcul des probabilités

Plan :

Exemple d'introduction

Dans une usine sont fabriquées des pièces cylindriques.

1) Les deux opérations de tournage et fraisage effectuées lors de la fabrication des pièces se font de façon indépendante : l'expérience montre qu'en fabrication normale, 1 % des pièces tournées et 2 % des pièces fraisées sont défectueuses. Si on prend au hasard une pièce dans un lot où les deux usinages précédents ont été effectués, quelles « chances » a-t-on que l'un des deux usinages au moins soit défectueux d'une part, et que dans un lot de 10 pièces, on n'ait aucune pièce défectueuse d'autre part ?

2) Une opération d'alésage est aussi effectuée à l'aide de deux machines M_1 et M_2 qui produisent respectivement 2 000 et 3 000 pièces par jour : dans l'ensemble des pièces alésées, 99,2 % sont sans défaut, la machine M_2 produisant, quant à elle, 99 % de pièces bonnes. Si une pièce alésée est jugée défectueuse, a-t-on plus de chance qu'elle provienne de M_1 que de M_2 ?

Les questions posées ci-avant consistent en une évaluation des chances qu'ont certaines éventualités de se produire : mesurer le degré de possibilité de leur réalisation, c'est leur affecter une probabilité. On sera en mesure d'évaluer ces chances de survenue une fois posés les principes de base de définition d'une expérience et des évènements qui lui sont liés, une fois introduite la notion de probabilité et établies les règles de calculs de ces probabilités. On aura par ailleurs, pour répondre à la 2e question, à préciser comment évaluer une probabilité, si on dispose de la connaissance d'une certaine information.

La notion de probabilité sera introduite de manière intuitive, puis le modèle probabiliste sera défini de manière axiomatique, ce qui permettra de préciser des règles de calcul de et entre probabilités.

Section I

Introduction à la notion de probabilité

I – Définition intuitive de la probabilité

Cette définition, classique, est empruntée aux jeux de hasard où tous les résultats possibles d'une expérience sont en nombre fini et ont la même chance de se réaliser : on dit alors qu'il y a équiprobabilité.

A- *Exemple*

Si on tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes non truqué, on dira qu'on a « une chance sur 52 » d'obtenir une carte précise, le roi de cœur par exemple $\left(\text{la probabilité sera évaluée par } \frac{1}{52}\right)$ ou qu'on a « 13 chances sur 52 » d'obtenir un cœur $\left(\text{la probabilité sera évaluée par } \frac{13}{52}\right)$.

B- *Formule*

Une formule simple d'évaluation de la probabilité d'un évènement, dans le cas d'équiprobabilité, est donnée par :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de résultats de l'expérience pouvant réaliser l'évènement}}{\text{nombre de tous les résultats possibles de l'expérience}}$$

Cette formule, intuitive, se retrouvera ultérieurement dans le cadre d'une définition plus large de la notion de probabilité.

II – Définition fréquentielle

La définition classique précédente a ses limites : dans la plupart des domaines où on utilise les probabilités (sciences économiques, sciences sociales…), il n'est pas possible d'affirmer que les résultats possibles d'une expérience sont en nombre fini et d'égale vraisemblance, c'est-à-dire équiprobables.

Prenons deux exemples : une machine est installée dans un atelier. Comment évaluer la probabilité qu'elle n'ait aucune panne pendant un mois de fonctionnement ? Un produit est vendu dans une grande surface. Comment évaluer la probabilité qu'en une semaine la demande dépasse 1 000 unités ?

Dans ces deux cas, l'évaluation d'une probabilité peut se faire à partir de l'expérience passée, en se référant à des observations déjà faites (portant sur des machines analogues déjà installées et fonctionnant dans les mêmes conditions pour le premier exemple, portant sur les ventes du produit les semaines précédentes pour le deuxième exemple), et en extrapolant dans le futur le comportement du phénomène étudié dans le passé.

Ainsi, si sur 50 machines utilisées dans les mêmes conditions, on en a observé 48 sans panne pendant un mois, on retiendra comme probabilité de l'évènement « la machine installée n'a aucune panne pendant un mois de fonctionnement » la fréquence observée $\frac{48}{50}$ soit 0,96. Cette valeur de la probabilité n'est qu'approchée (on parlera, ultérieurement dans le cours, de valeur estimée) : en effet si les observations se font sur un autre échantillon, il n'y a pas de raison pour que la fréquence observée, donc l'évaluation de la probabilité, reste la même.

Intuitivement, la probabilité cherchée sera d'autant mieux évaluée que le nombre d'observations utilisées est grand : la probabilité exacte pourrait être définie comme la fréquence limite obtenue si on augmentait indéfiniment le nombre d'observations.

Remarque : il existe des situations où on ne peut pas faire référence au passé. Par exemple, un investissement étant entrepris, comment affecter des probabilités aux valeurs possibles du cash-flow pour les années à venir ? Les probabilités seront alors évaluées subjectivement (question d'expérience, d'intuition…) et en quelque sorte « inventées ».

Section II

▼

Concepts de base

La formalisation qui suit (modèle de Kolmogorov) vise à définir un cadre général pour la notion de probabilité, avec des règles précises permettant, à partir de probabilités connues, de calculer les probabilités d'autres évènements.

Cette formalisation utilise largement le langage ensembliste (les notions de base de la théorie des ensembles figurent en annexe II).

I – Vocabulaire

A- *Épreuve (ou expérience aléatoire)*

C'est une expérience dont le résultat dépend du hasard et n'est donc pas connu à l'avance. Elle est susceptible d'être répétée plusieurs fois dans les mêmes conditions.

Exemples : jeter un dé, tirer au hasard une carte parmi 52, choisir au hasard un nom dans une liste,…

B- *Univers (ou espace fondamental)*

Une épreuve déterminée peut donner lieu à plusieurs résultats possibles : l'univers est alors l'ensemble de tous ces résultats possibles. Il décrit donc l'épreuve. On le note Ω.

Cet ensemble, ainsi que ses sous-ensembles, peuvent être représentés dans un diagramme de Venn (*voir annexe II*).

Exemple : Ω ={1,2,3,4,5,6} pour l'épreuve «jeter un dé».

Dans de nombreux cas, on se contente de dénombrer les cas possibles, sans en faire la liste (trop longue) : si on tire deux cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes, un résultat possible est un groupe de deux cartes distinctes. Le nombre d'éléments de Ω, noté card Ω, est alors C_{52}^{2}, soit 1 326 *(voir annexe I pour le calcul de dénombrement).*

C- *Évènement*

– C'est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve : sa réalisation dépendant du hasard, on précise que l'évènement est aléatoire.

Exemples : obtenir un numéro pair en lançant un dé, obtenir un cœur en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes, obtenir un homme de plus de 30 ans en choisissant une personne dans un groupe, …

On note un évènement A, B,…

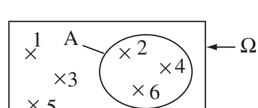
– A tout évènement correspond un sous-ensemble de l'univers Ω, qui est la liste de tous les résultats possibles qui peuvent le réaliser. Ce sous-ensemble sera noté par la même lettre.

L'évènement A sera réalisé lors de l'épreuve, si le résultat *r* de l'épreuve est un élément du sous-ensemble A.

Exemple : l'évènement A = obtenir un numéro pair en lançant un dé, est décrit par le sous-ensemble A={2,4,6}

Si le résultat *r* de l'épreuve est 2, 2 ∈ A, donc l'évènement A est réalisé.

Si le résultat *r* de l'épreuve est 3, 3 ∉ A, donc l'évènement A n'est pas réalisé



– Un évènement qui se résume à l'obtention d'un seul résultat de Ω est dit évènement élémentaire : on le note alors ω.

Exemple : ω_6 = obtenir le 6 = {6} (en lançant un dé)

– *Cas particuliers :*

1- évènement impossible : il n'est jamais réalisé quel que soit le résultat obtenu (par exemple : obtenir le 5 de cœur en tirant une carte dans un jeu de 32 cartes). Il est caractérisé bien sûr par l'ensemble vide et est donc noté $\varnothing$.
2- évènement certain : il est toujours réalisé quel que soit le résultat obtenu (par exemple : obtenir un numéro inférieur à 10 en lançant un dé). Il est caractérisé par l'univers tout entier et est donc noté Ω.

évènement impossible = $\varnothing$	évènement certain = Ω

II- Opérations sur les évènements

On considère, dans les définitions qui suivent, des évènements relatifs à une même épreuve.

Les exemples seront donnés à partir de l'épreuve du lancer d'un dé.

A- *Évènement contraire*

– Le contraire de l'évènement A est l'évènement noté $\overline{A}$ qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

A non réalisé $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ réalisé et donc A réalisé $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ non réalisé

– Il est caractérisé par le sous-ensemble de Ω qui contient tous les résultats possibles non situés dans A.

C'est donc le complémentaire de A dans Ω, d'où la notation $\overline{A}$ utilisée *(voir schéma 1 ci-après).*

Exemple : si A = obtenir un numéro inférieur à 3 = {1,2}, alors $\overline{A}$ = obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 = {3,4,5,6}

B- *Conjonction (ou intersection) d'évènements*

– L'évènement « A et B » est l'évènement qui est réalisé si et seulement si A et B le sont simultanément.

– Il est caractérisé par le sous-ensemble de Ω qui contient tous les résultats possibles situés à la fois dans A et dans B, c'est-à-dire le sous-ensemble $A \cap B$ *(voir schéma 2 ci-dessous)*.

Exemple : soit A = obtenir un numéro inférieur à 4 = {1,2,3} et B = obtenir un numéro pair = {2,4,6}, alors A et B = obtenir un numéro à la fois inférieur à 4 et pair = {2} = $A \cap B$.

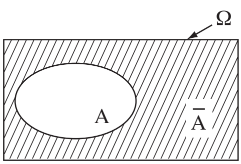
C- *Réunion d'évènements*

– L'évènement « A ou B » est l'évènement qui est réalisé si et seulement si l'un des deux est réalisé (donc soit A, soit B, peut-être les deux).

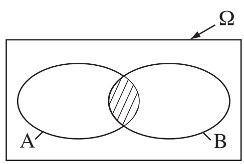
– Il est caractérisé par le sous-ensemble de Ω qui contient tous les résultats possibles situés soit dans A, soit dans B (peut-être dans les deux) : c'est le sous-ensemble $A \cup B$ *(voir schéma 3 ci-dessous)*.

Exemple : avec les évènements précédents, A ou B = obtenir un numéro pair ou inférieur à 4 = {2,4,6,1,3} = $A \cup B$.

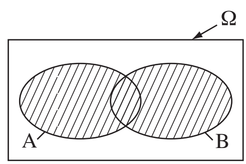
Remarque : le « ou » utilisé n'est pas exclusif : on sous-entend toujours que les deux éventualités sont possibles simultanément.



Évènement contraire $\overline{A}$
Schéma 1



Évènement "A et B"
Schéma 2



Évènement "A ou B"
Schéma 3

D- *Situations particulières*

1) Inclusion d'évènements

A est inclus dans B si la réalisation de A implique la réalisation de B : donc, si le résultat de l'épreuve est dans le sous-ensemble A, il est forcément dans le sous-ensemble B, et on a alors $A \subset B$ *(voir schéma 4 ci-après)*.

Exemple : A = obtenir un numéro inférieur à 3 = {1,2}

B = obtenir un numéro inférieur à 5 = {1,2,3,4}

Si A est réalisé, B l'est forcément.

2) Évènements incompatibles

Deux évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent jamais être réalisés simultanément, donc si l'évènement « A et B » est impossible. Les sous-ensembles correspondants de Ω sont disjoints *(voir schéma 5 ci-après)*, et donc :

$$\boxed{\text{A et B incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset}$$

Exemple : A = obtenir un numéro inférieur à 3 = {1, 2}
B = obtenir un numéro supérieur à 4 = {5, 6}

Cas particulier : deux évènements contraires sont forcément incompatibles.

3) Système complet d'évènements

Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forment un système complet d'évènements s'ils sont mutuellement incompatibles (c'est-à-dire incompatibles 2 à 2) et si leur réunion est Ω. Les sous-ensembles A_i correspondants sont disjoints 2 à 2 et de réunion Ω : ils forment donc une partition de Ω *(voir schéma 6 ci-après)*.

$$\boxed{\begin{array}{c}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \text{ système complet d'évènements} \\ \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ si } i \neq j \text{ et } \bigcup_i A_i = \Omega\end{array}}$$

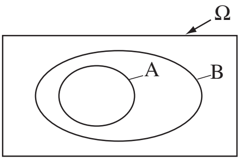
Exemple : soit l'épreuve « choisir au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes » et les évènements suivants :

A_1 = obtenir un trèfle,
A_2 = obtenir un carreau,
A_3 = obtenir un cœur,
A_4 = obtenir un pique.

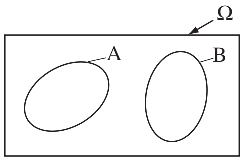
Ces 4 évènements forment un système complet.

Cas particulier : l'ensemble de tous les évènements élémentaires est un système complet particulier d'évènements.

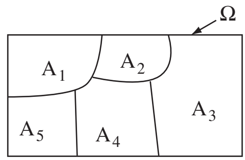
Remarque : les sous-ensembles A_i formant une partition de Ω, le résultat r de l'épreuve est forcément dans un des sous-ensembles A_i et un seul, ce qui signifie que, dans l'épreuve, un des évènements A_i et un seul est forcément réalisé.



Inclusion
d'évènements
Schéma 4



Évènements
incompatibles
Schéma 5



Système complet
d'évènements
Schéma 6

III- Tableau résumant la correspondance entre langage probabiliste et langage ensembliste

Soit une épreuve dont le résultat est noté r.

langage probabiliste	langage ensembliste
univers	ensemble Ω
résultat possible	élément ω ($\omega \in \Omega$)
évènement A	sous-ensemble de Ω ($A \subset \Omega$)
évènement impossible	$\varnothing$
évènement certain	Ω
ensemble de tous les évènements	ensemble des parties de Ω, soit $\mathscr{P}(\Omega)$
A est réalisé	le résultat r vérifie $r \in A$
évènement contraire de A	complémentaire de A dans Ω, soit $\overline{A}$
évènement « A et B »	sous-ensemble $A \cap B$
évènement « A ou B »	sous-ensemble $A \cup B$
évènements A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
réalisation de A ⇒ réalisation de B	$A \subset B$
système complet d'évènements	partition de Ω

Section III

▼

Définition d'une probabilité

Pour que le modèle probabiliste soit complet, il reste à ajouter à la description ensembliste d'une épreuve et des évènements qui lui sont liés, la définition d'une "mesure" des évènements.

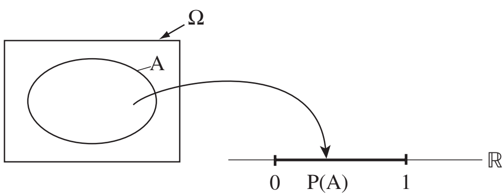
I- Définition

A- *Axiomes des probabilités*

Soit une épreuve caractérisée par l'univers fini Ω. On appelle probabilité une application de l'ensemble des évènements dans $\mathbb{R}$, notée P, vérifiant les axiomes suivants :

1/ $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ pour tout évènement A
2/ $P(\Omega) = 1$
3/ si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P est donc une application de l'ensemble des évènements, soit $\mathcal{P}(\Omega)$, dans [0,1].



Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé : il décrit de façon complète une épreuve puisque Ω est l'ensemble des résultats possibles, $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les évènements et P est la mesure de probabilité sur ces évènements.