Table des matières

Chapitre 1

Le consommateur

Tout d'abord, il est nécessaire de cerner ce qui motive (déterminants psychologiques, financiers…) les agents-ménages dans leurs choix de consommation et de modéliser leur comportement sous l'hypothèse de rationalité. Ces ménages, réduits à leurs activités de consommation, seront appelés les consommateurs. Dans la vision microéconomique présentée ici, on ignore le problème de la pluralité des personnes constituant le ménage et la manière dont sont agrégées les préférences au sein de ce ménage pour l'achat de certains biens. Le consommateur est donc perçu comme un individu unique disposant d'un budget dont il cherche à tirer le maximum de satisfaction. Ses goûts sont subjectifs même s'ils dépendent de certaines caractéristiques objectives telles que l'âge ou le niveau de culture. Le niveau de satisfaction sera défini à partir d'une fonction d'utilité dont nous verrons les principes de base et la maximisation sous contrainte.

I. Les principes de base

Plusieurs principes fondent l'utilité des biens et conduisent à la notion d'utilité marginale, concept central dans la théorie du consommateur :

• d'après Aristote, à l'origine du concept de valeur-utilité, l'utilité des biens dérive de la satisfaction des besoins. Dans cette optique Condillac énonce que : « la valeur des choses est fondée sur l'usage que nous pouvons en faire ». Cette idée d'une valeur fondée sur l'utilité, fondamentale chez les économistes marginalistes, s'oppose au courant théorique de la valeur-travail fondée sur la quantité de travail, directe et indirecte, incorporée dans la fabrication du bien (Smith, Marx) ;

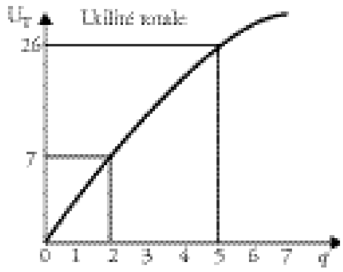
- ces besoins sont hiérarchisés selon leur importance (Platon), d'où la possibilité d'établir une typologie des biens ;
- il existe une certaine satiété des besoins, mais elle n'est jamais totale. Pour un bien donné l'utilité de la dernière unité consommée est donc plus faible que celle des unités précédentes : principe de l'utilité marginale décroissante, relative à l'unité supplémentaire consommée. Pour présenter ce principe, il est possible d'adopter une échelle d'utilité cardinale pour un bien donné, dans laquelle l'utilité s'exprime par un nombre.

1.1. *Le concept d'Utilité marginale (un bien)*

Considèrons les satisfactions que retire un consommateur de l'achat de diverses quantités de cassettes vidéo achetées au cours d'une période donnée (celle-ci ne doit être ni trop longue, car les goûts pourraient changer; ni trop petite, car les quantités pourraient être nulles ou très limitées). À la fin du XIX^{e} siècle, les économistes pensaient pouvoir mesurer les satisfactions (utilité cardinale), mais il n'y sont jamais parvenus. Ici ,pour donner une vision plus concrète de l'utilité cardinale, on considère que l'utilité de la consommation de chaque cassette représente la quantité maximale d'argent à laquelle on est prêt à renoncer pour acheter cette unité (prix de réservation pour cette unité de bien). Ceci renvoie cependant au problème de la définition de l'utilité de la monnaie. Dans le tableau suivant, avec cette interprétation, on a pu définir les utilités des différentes quantités de cassettes achetées, de la première à la septième. Elles sont qualifiées de marginales, car chaque nouvelle cassette procure un supplément d'utilité au consommateur.

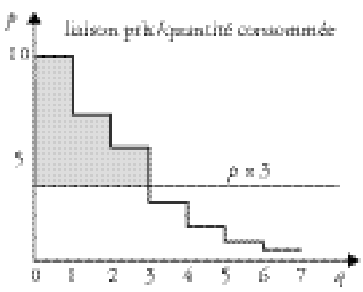
TABLEAU 1 ET GRAPHIQUE 1 : UTILITÉ TOTALE

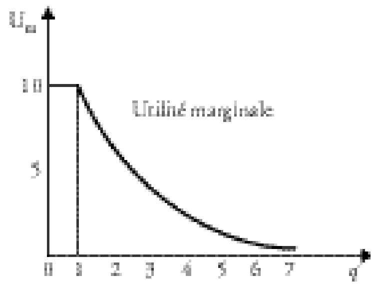
q	Utilité totale	Utilité marginale
1	10	10
2	17	7
3	22	5
4	24,5	2,5
5	26	1,5
6	27	1
7	27,5	0,5



Pour la première cassette achetée, on est prêt à sacrifier 10 unités monétaires que l'on aurait pu utiliser à d'autres consommations. Les prix de réservation décroissent ensuite pour les autres cassettes. La construction par points de la courbe correspondante définit l'utilité marginale ($U_m(q)$) de la consommation d'un nombre de plus en plus élevé q de cassettes. Selon le principe de non saturation, **l'utilité marginale (U_m)** est toujours positive, quel que soit le numéro de la cassette (valeur de q). Par ailleurs, les valeurs successives des utilités marginales sont constamment décroissantes.

GRAPHIQUES 2 : UTILITÉ MARGINALE





L'utilité totale d'un nombre q de cassettes ($U_T(q)$) est définie en additionnant les utilités marginales successives. Elle est croissante, selon une courbe concave (absence de saturation). Ses dérivées premières et secondes sont donc telles que : $U'(q) > 0$ et $U''(q) < 0$. Dans la représentation graphique ci-dessous, l'utilité est fixée à 0 pour $q = 0$.

Confronté à un prix de 3 € pour chaque cassette vidéo, le consommateur compare ce prix avec les utilités marginales qu'il retire successivement de leur consommation. Il en achète celles-ci tant que leur utilité dépasse le prix (surplus lié à cet achat) et cesse d'en acheter dès que l'utilité marginale tombe en dessous du prix de la cassette. Son intérêt est alors d'acheter d'autres produits pour lesquels il existe un surplus positif (utilité marginale de ces produits supérieure à leur prix). Dans cet exemple il achètera donc seulement trois cassettes au cours de cette période de consommation.

Cet exemple, relatif à un bien, doit être élargi maintenant à un panier de biens pour déterminer l'utilité globale de ce panier. Préalablement une perspective théorique sur la genèse et l'évolution du concept s'impose.

◗ *1.2. L'évolution du concept d'utilité*

La théorie de l'utilité marginale est due à Jevons [1871], Menger [1871] et Walras [1874] : c'est une théorie de la **valeur d'usage** en relation avec la quantité consommée. L'utilité de la dernière unité achetée est au moins égale à la **valeur d'échange** (le prix) de ce bien.

On considère un consommateur dans une économie disposant de I biens. Il peut donc acheter des paniers comportant au maximum ces I biens. Un panier de consommation possible (par exemple le panier 1) correspond donc au vecteur de biens q^1 :

$q^1 = \{q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_I\}$, où les q_i représentent les quantités, éventuellement nulles, achetées par le consommateur. L'utilité $U(q^1)$ de ce panier s'écrit, dans le cas d'**utilités cardinales** et additives par rapport aux biens : $U(q^1) = \Sigma_i \, U_i(q_i)$: c'est-à-dire la somme des utilités totales relatives aux quantités consommées de chaque bien.

Pour une transformation laissant invariante U (différentielle totale nulle) : $dU = U_i' \, dq_i + U_j' \, dq_j = 0 \qquad - dq_i/dq_j = U_i'/U_j'$ (rapport des utilités marginales). Ainsi, le concept mathématique approprié pour représenter les variations d'utilité est la dérivée.

Ce rapport est le taux marginal de substitution entre les deux biens *i* et *j* : quantité supplémentaire du bien *i* qu'il faut fournir au consommateur pour compenser exactement une diminution d'une unité du bien *j*.

Pour expliquer les phénomènes de complémentarité et de substitution, Edgeworth [1881] utilise une fonction d'utilité dont les arguments sont les quantités consommées de chaque bien. Cela ne change pas la différentielle totale, et donc le résultat précédent :

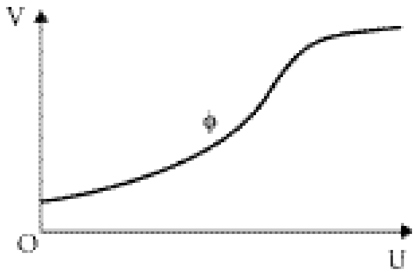
$$U = U(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_I) \qquad - dq_i/dq_j = U_i'/U_j'$$

En fait la caractéristique essentielle d'une fonction d'utilité est d'établir un ordre de préférence dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ des biens : possibilité de comparer deux paniers de biens q^1 et q^2 (vecteurs de biens). Pour cela une fonction d'utilité cardinale n'est pas nécessaire. La difficulté de mesurer une utilité, jointe à la nécessité d'ordonner l'ensemble des paniers de biens auquel un consommateur est confronté (capacité de choix), conduisirent Pareto [1897] à proposer une **utilité ordinale**. Comme il est possible de comparer deux températures avec des thermomètres Celsius ou Farenheit, on peut également comparer deux paniers de biens avec des fonctions d'utilité différentes. L'ordre est en effet conservé si :

$V(q^k) = \varphi(U(q^k)), \quad k,$
où φ est une fonction croissante.

L'ordre des préférences ne change pas, ce qui justifie le qualificatif d'utilité ordinale.

GRAPHIQUE 3 :
LA FONCTION D'UTILITÉ



1.3. La relation de préférence

On considère toujours une économie à I biens et les paniers de consommation possibles dans cette économie. Le comportement attribué au consommateur est de pouvoir classer tous ces paniers de biens possibles (vecteurs) selon une échelle de préférence, sans que celle-ci corresponde à une évaluation cardinale (chiffrée). Cette capacité de classement correspond au concept d'utilité ordinale et à l'utilisation d'une relation de préférence, représentée par $\succcurlyeq$ (préféré ou indifférent à) qui vérifie les propriétés suivantes :

- transitivité : $q^1 \succcurlyeq q^2$ et $q^2 \succcurlyeq q^3 \qquad q^1 \succcurlyeq q^3$ (cohérence des classements successifs)
- réflexivité : $q^1 \succcurlyeq q^1$

Cette relation, préordre au sens mathématique, est utilisée dans la plupart des présentations actuelles de la théorie du consommateur. Ce préordre est complet s'il permet toujours de comparer deux paniers de biens dans l'ensemble des I biens :

si $(q^1, q^2) \in \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$: $q^1 \succcurlyeq q^2$ ou $q^1 \succcurlyeq q^2$ (ou les deux)

Un tel préordre complet permet de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des biens et un ordre strict, ainsi que de représenter les préférences à partir de fonctions d'utilité :

$q^1 \succcurlyeq q^2 \iff U(q^1) \geqslant U(q^2), \quad q \in Q$

$q^1 \succ q^2 \iff U(q^1) > U(q^2)$: q^1 est strictement préféré à q^2.

$q^1 \sim q^2 \iff U(q^1) = U(q^2)$: q^1 est indifférent à q^2.

Si la fonction U est bien définie par un nombre, elle ne reflète plus une évaluation de l'utilité, mais seulement la possibilité de comparer l'ordre des utilités, relatives à des paniers de biens quelconques. Cela justifie que l'on puisse choisir de nouvelles fonctions d'utilité qui conserveront le même ordre, à partir de transformations croissantes $\varphi(U(q^k))$ de la fonction d'utilité U.

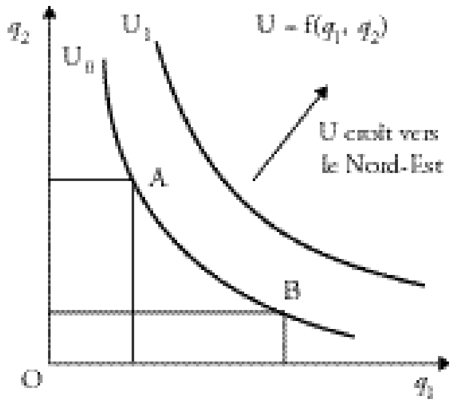
1.4. *Fonctions d'utilité et courbes d'indifférence*

La possibilité de hiérarchiser les différents paniers de biens de $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ permet de définir des surfaces de niveau dont l'utilité est constante (iso-utilité du grec *iso* égal), appelées **courbes d'indifférence**. Les graphiques suivants donnent une représentation de ces courbes dans $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ (panier de deux biens) et leurs principales propriétés :

› Représentation dans $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ cela se traduit par un réseau de courbes, dont chacune est constamment décroissante.

GRAPHIQUE 4A : LES COURBES D'INDIFFÉRENCES

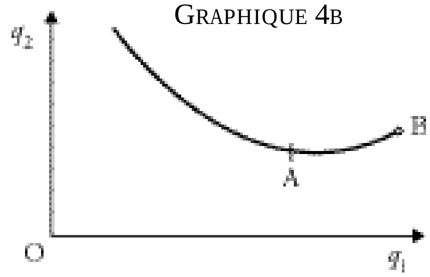


› Les courbes d'indifférence ne peuvent être croissantes.

Ci-contre B domine A. En effet le panier de bien B possède plus de bien, 1 et 2 que le panier A.

Ces deux points ne peuvent donc être sur la même courbe d'indifférence.

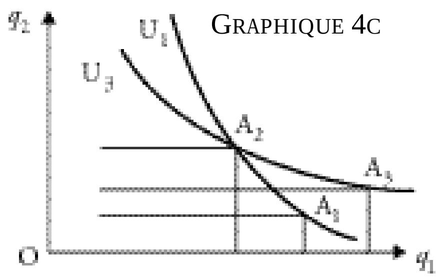
GRAPHIQUE 4B



› Les courbes d'indifférence ne peuvent se couper.

En effet, si elles se coupent, on peut trouver, comme dans la figure ci-dessus, trois points A_1, A_2, A_3, d'utilités respectives U_1, U_2, U_3, tels que A_2 se trouve à l'intersection des courbes d'indifférence d'utilités U_2 et U_3. Comme A_3 domine A_1 (consommations supérieures dans les deux biens) : $U_3 > U_1$. Or au point A_2 : $U_1 = U_2$ (courbe U_1) et $U_3 = U_2$ (courbe U_3). D'où $U_1 = U_3$ ce qui est contradictoire.

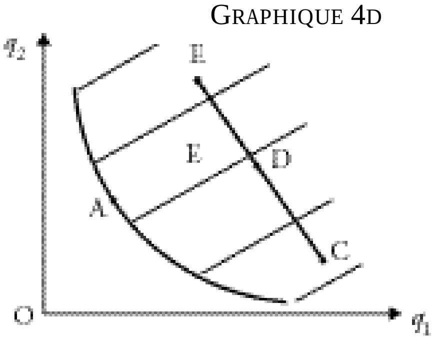
GRAPHIQUE 4C



› Les préférences sont convexes

– l'ensemble E hachuré des vecteurs de consommation tel que :

GRAPHIQUE 4D



$E = \{x/U(x) \geqslant U(A)\}$ est convexe :
– toute combinaison convexe de deux vecteurs de E appartient également à E (D $\in$ E).
– la convexité des préférences implique la décroissance du taux marginal de substitution.

1.5. *Le taux marginal de substitution*

Considérons un consommateur confronté à un choix de deux biens dont l'utilité est définie par $U(q_1, q_2)$. Le long d'une courbe d'indifférence $dU = 0$, d'où :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 = 0 \qquad \frac{-\,dq_2}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{U'q_1}{U'q_2}$$

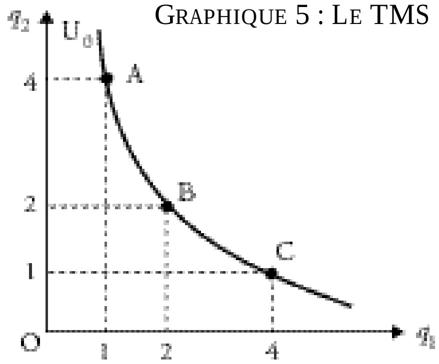
Ce rapport, appelé taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1, est égal à la quantité marginale de bien 2 à laquelle le consommateur doit renoncer pour acquérir une quantité marginale supplémentaire de bien 1, à utilité constante. Il est égal au rapport des utilités marginales respectives des biens 1 et 2.

Exemple : Calcul de taux marginaux de substitution (TMS) le long de la courbe d'indifférence $U = q_1 \times q_2 = 100$ (fonction hyperbolique). On a :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1 \quad \text{d'où : TMS} = \frac{-\,dq_2}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{q_2}{q_1}$$

Pour les trois points A, B et C de coordonnées respectives A (5; 20); B (10; 10) et C (20; 5), on trouve les valeurs suivantes des TMS : $TMS_A = 4$; $TMS_B = 1$; $TMS_C = 0{,}25$.

GRAPHIQUE 5 : LE TMS



Ces valeurs correspondent aux pentes des tangentes à la courbe d'indifférence, pour les trois points considérés. Elles expriment des équivalences entre les biens 2 et 1 pour des variations marginales des quantités de ces biens. Ainsi au point A, pour conserver le niveau d'utilité 100, le consommateur est prêt à abandonner du bien 2 pour augmenter sa consommation de bien 1 dans un rapport de 4 à 1. Au point B l'équivalence entre les deux biens est dans un rapport de 1 à 1.

Quelle serait l'équivalence au point D (1 ; 100) ? (Réponse : rapport de 100 à 1).

On voit sur cet exemple le principe de l'utilité marginale décroissante : plus la quantité de bien 2 consommée est grande, plus l'utilité de consommer encore plus de ce bien diminue. Il faut en effet une quantité de plus en plus forte de bien 2 pour compenser l'abandon d'une seule unité de bien 1.

Lorsque les variations des quantités consommées ne sont plus marginales, on peut également définir un taux de substitution entre les deux biens. Cela correspond à une corde sur la courbe d'indifférence. Ainsi on passe du point A précédent au point A′ (6 ; 16,67), sur la même courbe d'indifférence, en augmentant d'une unité la consommation de bien 1 et en réduisant de 3,33 unités la consommation de bien 2. Ce taux de substitution est donné par $\Delta q_2/\Delta q_1 = 3{,}33$. Il est légèrement différent de $TMS_A = 4$.

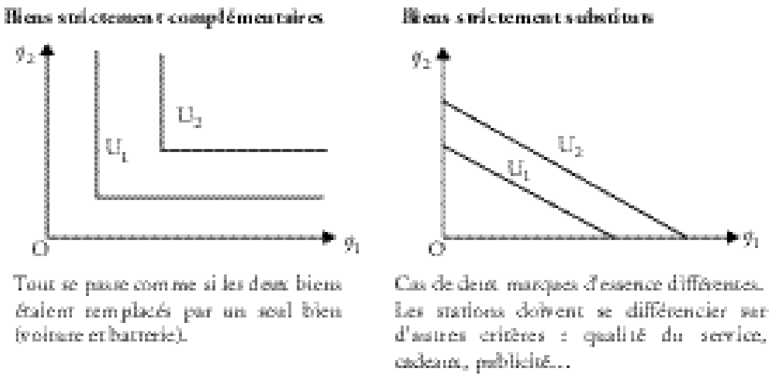
◗ *1.6. Biens complémentaires et substituables*

Nous sommes tous conscients qu'il existe des relations particulières entre les biens qui vont modifier nos attitudes de consommation. C'est le cas notamment des biens complémentaires et des biens substituts :

- **deux biens sont complémentaires** si la possession de l'un et de l'autre procure une satisfaction supérieure à la somme des satisfactions des deux biens s'ils étaient pris isolément (vision cardinale de la super-additivité). Ainsi, il y a complémentarité entre des skis et un forfait sur des remontées mécaniques, entre une voiture et de l'essence ;
- **deux biens sont substituts** si l'on peut remplacer facilement l'un par l'autre, par exemple en cas de pénurie ou de hausses de prix. Le thé et le café sont substituts car, à défaut de l'un, on se reporte souvent sur l'autre. Cela est encore plus vrai pour deux marques d'une même boisson (Pepsi et Coca). La crise de la vache folle est également un bon révélateur de la substituabilité des produits carnés, avec un report de consommation sur les volailles et l'agneau.

Les courbes d'indifférence permettent de représenter aisément les cas des biens strictement complémentaires et strictement substituts :

GRAPHIQUE 6 : BIENS COMPLÉMENTAIRES ET SUBSTITUTS



Dans la plupart des cas la complémentarité et la substituabilité sont seulement partielles. Les courbes d'indifférence ne sont plus des segments de droite.

À partir de la fonction d'utilité du consommateur et de sa représentation graphique (courbes d'indifférence), il est possible de déterminer le panier de biens maximisant l'utilité du consommateur, compte tenu du budget disponible pour sa consommation, au cours de la période choisie.

II. Optimisation

On suppose d'abord que ce budget ainsi que les prix sont connus. Entre le revenu et le budget disponible pour la consommation des écarts peuvent exister, en raison des phénomènes d'épargne. La logique de cet arbitrage entre consommation et épargne fait l'objet de développements ultérieurs, relatifs aux choix intertemporels.

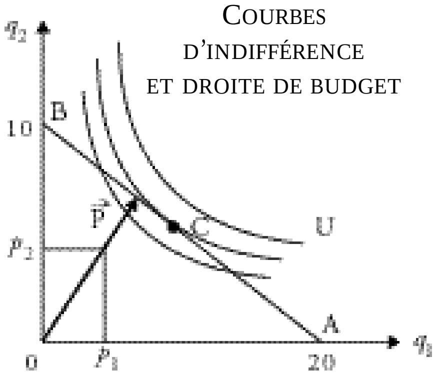
2.1. Contrainte budgétaire et fonction objectif

On considère donc ici que le budget (R) est en fait le revenu disponible pour la consommation (après les opérations d'épargne ou d'emprunt).

Dans un premier temps il importe de déterminer l'ensemble des possibilités de consommations, accessibles grâce au budget R. Dans une économie à deux biens, facile à représenter graphiquement, cet ensemble est appelé droite de budget. Ensuite, au travers de la maximisation de l'utilité du consommateur sous la contrainte de budget, il est possible de déterminer le panier optimal de biens en fonction du revenu et des prix (fonctions de demande).

Dans une économie à deux biens, dans laquelle le revenu d'un consommateur est R et le vecteur prix est $\overrightarrow{P} = (p_1, p_2)$, on considère que ce consommateur s'adapte passivement aux prix du marché. Il est sans action sur les prix (hypothèse du preneur de prix ou *price taker*). La droite de budget représente les différentes possibilités de consommer ces deux biens en épuisant le budget R : $R = \Sigma_i\, p_i q_i = p_1 q_1 + p_2 q_2$

GRAPHIQUE 7 : COURBES D'INDIFFÉRENCE ET DROITE DE BUDGET



L'abscisse à l'origine est donné par $q_2 = 0$, soit $OA = R/p_1$. De même l'ordonnée à l'origine correspond à $q_1 = 0$, soit $OB = R/p_2$.

Tous les points du segment AB sont accessibles *via* le budget R.

Ainsi pour un budget R = 100, avec un vecteur prix $\overrightarrow{P}$ (5; 10), OA = 20 et OB = 10. On peut aussi consommer au point C, sur ce segment : 10 unités du bien 1 et 5 unités du bien 2.

Les points situés en dessous de AB (Sud-Ouest), n'épuisent pas le budget disponible, et ceux situés au-dessus (Nord-Est) sont inaccessibles sans augmentation préalable du budget. On peut noter que le vecteur prix $\overrightarrow{P}$ est perpendiculaire à AB**.**

Lorsque l'on représente diverses courbes d'indifférence sur ce graphique, définies par la fonction d'utilité $U(q_1, q_2)$, on constate que certaines se trouvent au Nord-Est de AB : il n'est donc pas possible d'atteindre de tels niveaux d'utilité. En revanche, d'autres coupent ce segment et il faut déterminer, parmi ces courbes d'indifférence accessibles, quelle est celle dont le niveau d'utilité est maximal.

2.2. *La maximisation de l'utilité : cas de deux biens*

Le consommateur cherche à maximiser $U(q_1, q_2)$ sous la contrainte de budget : $R = p_1q_1 + p_2q_2$

Ce programme de maximisation appartient à la classe des programmes mathématiques d'optimisation, sous contrainte égalité. Par rapport à la recherche d'un optimum libre, obtenu à partir des conditions du premier ordre (différentielles des variables de commande égales à 0), il faut tout d'abord déterminer le Lagrangien (L) de ce programme qui intègre la contrainte égalité précédente grâce à un coefficient de Lagrange λ. Le programme et le Lagrangien s'écrivent ainsi :

Programme : $\underset{(q_1,\, q_2)}{\text{Max}}\ U(q_1, q_2)$

Lagrangien : $L(q_1, q_2, \lambda) = U(q_1, q_2) + \lambda(R - p_1q_1 - p_2q_2)$

Dans le Lagrangien, la contrainte égalité rajoute une quantité nulle à la fonction d'utilité. Cet artifice mathématique ne change pas la fonction à maximiser, mais permet d'imposer à la solution de respecter cette contrainte. Les conditions du premier ordre définissent encore les conditions pour obtenir un extremum (maximum ou minimum), mais cette fois contraint :

(1) $\partial L/\partial q_1 = U_1 - \lambda p_1 = 0$ (conditions du premier ordre pour un extremum)

(2) $\partial L/\partial q_2 = U_2 - \lambda p_2 = 0$

(3) $\partial L/\partial \lambda = R - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$:

la troisième condition ne fait que répéter la contrainte égalité.

On en déduit : $U_1/p_1 = U_2/p_2 = \lambda$ et $U_2/U_1 = p_2/p_1$

D'où :

1/ Le taux marginal de substitution (TMS) entre les deux biens, égal au rapport des utilités marginales (U_2/U_1), est aussi égal au rapport des prix.

2/ λ (coût de la contrainte) représente l'utilité procurée par un euro supplémentaire de revenu (dU/dR). En effet, il suffit de calculer les différentielles totales dU et dR :

$$\mathrm{dU} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1}\,\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_2}\,\mathrm{d}q_2 = \mathrm{U}_1\,\mathrm{d}q_1 + \mathrm{U}_2\,\mathrm{d}q_2$$

$$\mathrm{dU} = \lambda p_1 \mathrm{d}q_1 + \lambda p_2\,\mathrm{d}q_2 = \lambda(p_1 \mathrm{d}q_1 + p_2\,\mathrm{d}q_2)$$

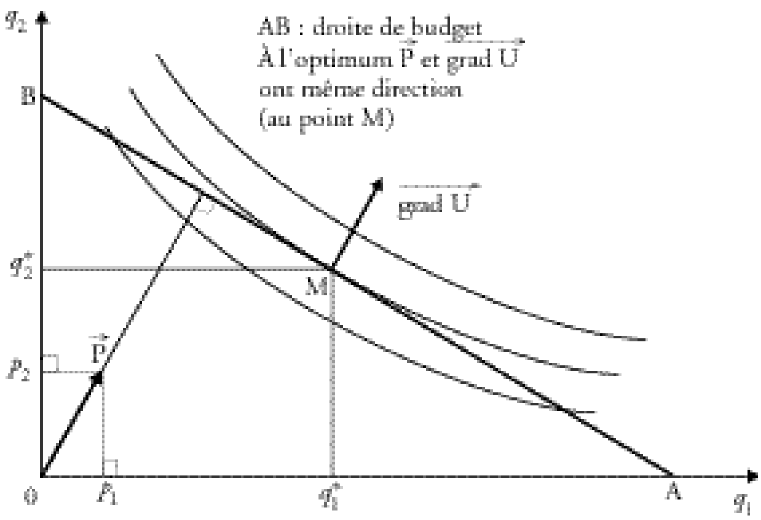
Un euro supplémentaire consommé procure un supplément d'utilité marginale. Cela renvoie à la question de l'intérêt de travailler plus pour augmenter son niveau de consommation. Si la perte d'utilité consacrée à ce travail supplémentaire (réduction de son temps de loisir, par exemple) pour gagner un euro est inférieure à 1, alors il convient de travailler plus.

3/ Les conditions du premier ordre définissent un extremum. Pour qu'il soit un maximum il faut que les conditions du deuxième ordre soient respectées. Cependant cet extremum est toujours un maximum dans le cas d'une fonction U strictement quasi concave (forme hyperbolique par exemple).

2.2.1. Représentation graphique de la solution optimale

Le point optimal M, respectant la contrainte de budget AB, maximise l'utilité du consommateur. Il se trouve en effet sur la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine qu'il est possible d'atteindre. En un tel point la droite de budget AB et la courbe d'indifférence passant par le point M sont tangentes. En ce point également, le vecteur prix $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ U, dont les coordonnées (U_1, U_2) sont les utilités marginales des deux biens, sont parallèles, car ils ont même pente : $U_2/U_1 = p_2/p_1$

GRAPHIQUE 8 : LE GRADIANT D'UTILITÉ



Exemple : Soit $U = q_1 q_2$ avec P : ($p_1 = 2$ €; $p_2 = 5$ €) et R = 100 €

Le programme consiste à maximiser U sous la contrainte de budget (droite), soit le lagrangien :

$L(q_1, q_2, \lambda) = q_1 q_2 + \lambda(R - p_1 q_1 + p_2 q_2)$

(1) $\partial L/\partial q_1 = q_2 - 2\,\lambda = 0$

(2) $\partial L/\partial q_2 = q_1 - 5\,\lambda = 0$

(3) $\partial L/\partial \lambda = R - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$

Cette équation et celle de la droite de budget conduisent aux valeurs suivantes (à vérifier) :

$q_1 = 25$ €; $q_2 = 10$ €; $\lambda = 5$; $U = 250$.

Lorsque la contrainte passe de $R = 100$ € à $R + dR = 101$ € ($dR = 1$ €), l'utilité augmente de U à U+dU, soit $dU = \lambda = 5$. En fait, comme cette augmentation de R d'une unité n'est pas marginale, cette valeur n'est qu'approchée (vérifier).

2.2.2. Le cas particulier de l'optimum en coin

Jusqu'à présent il a été supposé qu'à l'optimum l'agent consommait les deux biens ($q_i > 0, \quad i$). Si l'un des biens n'est pas consommé, il y a des contraintes inégalités à introduire dans le programme de maximisation :

$$q_i \geqslant 0 , \quad i \in \{1 ,2\}$$

Ces contraintes imposent de recourir à une nouvelle classe de programmes d'optimisation, celle de l'optimisation sous contrainte inégalité, nécessitant l'introduction de multiplicateurs $\mathbf{a}_\mathrm{i}$ de Kühn et Tücker, pour chaque contrainte. On commence par écrire, si besoin est, chaque contrainte avec le premier membre de l'inéquationsupérieur ou égale à zéro. On multiplie ensuite par le facteur α_i, avant de rendre ce premier membre égal à zéro.
Ainsi les contraintes précédentes deviennent respectivement : $\alpha_1 q_1 = 0$ et $\alpha_2 q_2 = 0$. Le Lagrangien est alors :

$$V(q_1, q_2, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = U(q_1, q_2) + \lambda(R - p_1 q_1 - p_2 q_2) + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$$

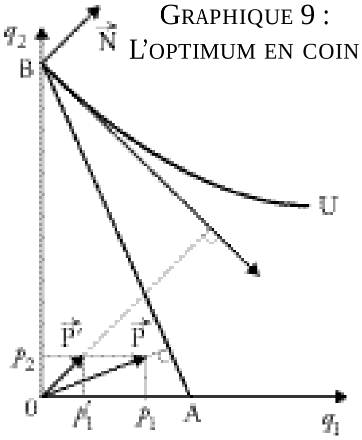
$$\partial V/\partial q_i = U_i - \lambda p_i + \alpha_i = 0, \ (i = 1, 2)$$

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

$$\alpha_i q_i = 0, \ (i = 1, 2)$$

Si à l'optimum les q_i sont strictementsupérieures ou égales à zéro, rien n'est changé par rapport aux résultats précédents et les deux équations donnent $\alpha_i = 0$, $(i = 1, 2)$.

GRAPHIQUE 9 : L'OPTIMUM EN COIN



Sur la figure ci-contre, il n'existe aucun point de la droite de budget tel qu'une courbe d'indifférence soit tangente en ce point à cette droite.

Cependant U est maximal au point B $q_1 = 0$. D'où :

$\alpha_1 \neq 0$ $\quad$ $U_1 - \lambda p_1 + \alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$ $\quad$ $U_2 - \lambda p_2 = 0$

$$U_1/(p_1 - \alpha_1/\lambda) = U_2/p_2 = \lambda$$

Ce résultat est à comparer au résultat précédent :

$U_1/p_1 = U_2/p_2$. Soit $p_1' = p_1 - \alpha_1/\lambda$.

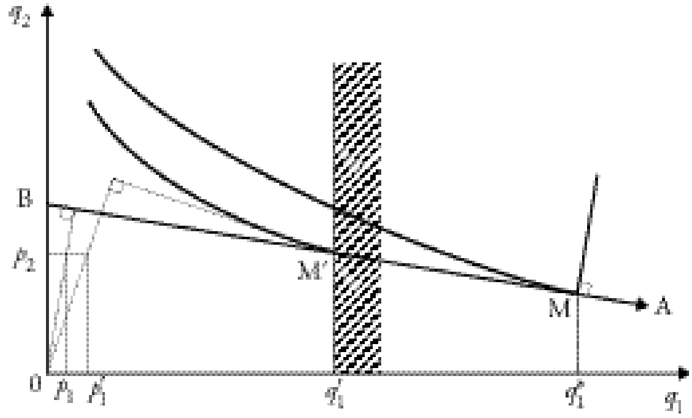
Avec ce nouveau prix pour le bien 1, définissant un nouveau vecteur prix $\vec{P}'$ (p_1', p_2), on retrouve l'égalité entre le rapport des utilités marginales et le rapport des prix. Sur le graphique, le vecteur normal ($\vec{N}$) à U en B a donc pour composantes (p_1', p_2). La composante pour le bien 1 non consommé est inférieure à son prix (concept de **« prix ressenti »** : $p_1' = p_1 - \alpha_1/\lambda$). Ce prix est la valeur que le consommateur attacherait à la première unité de ce bien s'il la consommait. Ainsi on peut se demander à partir de quel prix nous achèterions telle voiture prestigieuse ou tel vêtement de marque. Le phénomène des soldes permet souvent d'accéder à un tel achat, grâce aux rabais obtenus. Dans ce cas le prix soldé devient inférieur au prix ressenti.

Cas particulier : **bien contingenté**

Dans le cas d'un bien contingenté (par exemple essence en cas de crise de l'énergie, ou tickets de rationnement pendant les guerres), le prix reste accessible mais la disponibilité du bien est réduite ($q_1' \geqslant$ q1).

La contrainte inégalité, à intégrer dans le Lagrangien, s'écrirait alors : $\alpha_1(q_1' - q1) = 0$.

GRAPHIQUE 10 : LA CONTRAINTE INÉGALITÉ



S'il respecte la contrainte, sa consommation optimale correspond au point M′. En faisant les calculs de maximisation avec cette contrainte, on trouve que le prix ressenti au point M′ (p_1') est supérieur au prix p_1 si, en l'absence de contrainte, la consommation optimale (point M) est $q^*_1 \geqslant q_1'$. Dans ce cas, comme la contrainte sera effective, vous pouvez d'ailleurs remplacer la contrainte inégalité par la contrainte égalité : $q^*_1 = q_1'$ et utiliser un multiplicateur de Lagrange traditionnel. Ce prix ressenti correspond au prix maximal que le consommateur accepterait de payer ce bien au marché noir. Cette analyse constitue une légitimation économique des prix de « marché noir ». S'il peut acheter du bien 1 au marché noir à un prix intermédiaire entre son prix ressenti et le prix normal, son utilité sera supérieure à celle du point M′, intermédiaire entre cette utilité et celle de la solution optimale non contingentée (point M). Inversement, le consommateur dont la solution optimale correspond à une consommation inférieure à son allocation de tickets trouvera un avantage manifeste à revendre ses tickets excédentaires. Ces offres et ces demandes de tickets définissent un marché des tickets dont l'équilibre fixe le prix normal de vente sur le marché noir (*cf. infra* l'équilibre partiel d'un marché).

◗ *2.3. Généralisation à n biens*

Tous les résultats précédents se généralisent au cas de I biens, mais il devient plus difficile d'en effectuer une représentation graphique. Le consommateur cherche maintenant à maximiser $U(q_1, \dots, q_i, \dots, q_I)$ sous la contrainte de budget qui intègre l'ensemble des biens I :

$R = \Sigma_i\, p_i q_i = p_1 q_1 + \dots + p_i q_i + \dots + p_I q_I$

Le Lagrangien s'écrit :

$L(q_1, \dots, q_i, \dots, q_I, \lambda) = U(q_1, \dots, q_i, \dots, q_I) + \lambda(R - \Sigma_i\, p_i q_i)$

Les conditions du premier ordre définissent encore les conditions pour obtenir un extremum :

$\partial L/\partial q_i = U_1 - \lambda p_i = 0, \quad i$ (I conditions du premier ordre pour un extremum)

$\partial L/\partial \lambda = R - \Sigma_i\, p_i q_i = 0$

On en déduit : $U_i/p_i = U_j/p_j = \lambda$ et $U_j/U_i = p_j/p_i \quad i$ et j

D'où :

1/ Le taux marginal de substitution entre deux biens quelconques est égal au rapport de leurs utilités marginales. Il est aussi égal au rapport de leurs prix.

2/ λ (coût de la contrainte) représente toujours l'utilité procurée par un euro supplémentaire de revenu (dU/dR).

3/ Les conditions du premier ordre définissent un extremum. Pour qu'il soit un maximum il faut que les conditions du deuxième ordre soient respectées. Cet extremum est toujours un maximum dans le cas d'une fonction U strictement quasi concave.

◗ *2.4. L'arbitrage entre loisir et travail*

Un arbitrage économique binaire définit un choix entre deux décisions possibles. L'essentiel des revenus des agents provenant du travail, le fait de choisir une heure supplémentaire de loisir, à supposer que ce choix soit possible (artisan travaillant à son compte), réduit le temps de travail d'une heure, soit, à taux de salaire constant (w), une réduction correspondante du revenu.

Le concept général de **coût d'opportunité** traduit un tel choix. Il correspond à la valeur qu'attache l'agent au meilleur second choix, parmi les choix possibles. Dans le cas présent (deux choix possibles), le coût d'opportunité d'une heure supplémentaire de loisir est donc la perte d'une heure de salaire, soit w.

On considère que le revenu de l'agent a deux composantes :

– une composante non salariale (R) : revenu des actifs immobiliers, financiers, …
– une composante salariale (wL) : salaire horaire (w) et temps de travail (L).

Si le temps total disponible par jour est H = 24 heures, alors :

$L = H - T$ où T est le temps de loisir (intégrant le sommeil)

Le niveau de consommation est défini par C (en volume) dont le prix unitaire est p.

Les préférences des ménages s'expriment par U(T,C).

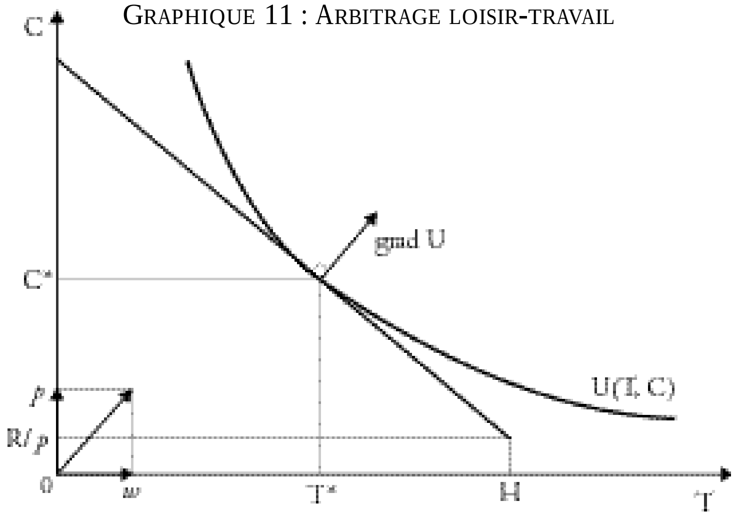
Le programme du consommateur consiste à maximiser U(T,C) sous la contrainte de budget :

$$pC = R + w(H - T)$$

$$L(T, C, \lambda) = U(T,C) + \lambda[R + w(H - T) - pC]$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} - \lambda w = 0\ ; \quad \frac{\partial L}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \lambda p = 0 \qquad \frac{w}{p} = \frac{\frac{\partial U}{\partial T}}{\frac{\partial U}{\partial C}}$$

GRAPHIQUE 11 : ARBITRAGE LOISIR-TRAVAIL



À l'optimum le taux marginal de substitution de la consommation au loisir est égal au taux de salaire réel (*w/p*) :

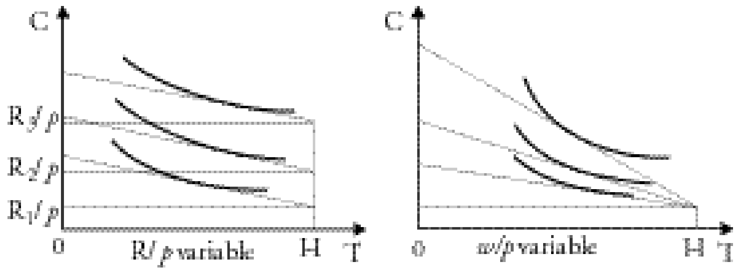
pente(grad U) = *w/p*. La droite de budget définit la contrainte pour les différents temps de loisir choisis.

Les graphiques ci-après montrent les influences respectives d'une variation des revenus et du taux de salaire réel (*w/p*) :

- une élévation des revenus non salariaux (successivement R_1, R_2, R_3) a tendance à augmenter le temps de loisir optimal (déplacement vers la droite des points de tangence).
- Une hausse du taux de salaire réel peut avoir une influence plus contrastée. En effet une hausse de ce taux incite à travailler plus, mais comme de plus en plus de travail accroît la pénibilité marginale du travail, des augmentations impor-

tantes de ce taux peuvent inciter à travailler moins quand le temps de travail devient trop important.

GRAPHIQUES 12 : INFLUENCES D'UNE VARIATION DES REVENUS ET DU TAUX DE SALAIRE SUR L'UTILITÉ



2.5. *La théorie du consommateur de Lancaster*

Lancaster [1966] propose une nouvelle théorie microéconomique du consommateur dans laquelle ce qui compte vraiment pour le consommateur n'est pas le bien en lui-même, mais les caractéristiques contenues dans ce bien. Ainsi lorsque celui-ci achète de la purée en sachet plutôt que des pommes de terre pour préparer de la purée, c'est qu'il valorise la caractéristique économie de temps. Les produits à base de pomme de terre contiennent donc des caractéristiques identiques (contenu en protides, glucides, lipides, calories), mais aussi se différencient par le goût (frite, purée, …) et le temps de préparation. Chaque consommateur valorise différemment l'ensemble de caractéristiques contenu dans chaque bien. Un consommateur pressé, dont le coût d'opportunité du temps est élevé, appréciera beaucoup les produits à préparation instantanée.

2.5.1. Données

Biens : {1 , …, j , …, J}, x_j : quantité du bien j;

Caractéristiques : {1 , …, i, …, I}, z_i : quantité de la caractéristique i;

b_{ij} : quantité de la caractéristique i contenue dans une unité de bien j (hypothèse de linéarité). D'où :

$z_i = b_{ij}x_j$: contenu de la caractéristique i dans la quantité x_j de bien j.

$z_i = \sum_{j=1}^{J} b_{ij}x_j$: pour un « panier de biens »,

soit en écriture matricielle : $\boldsymbol{z} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}$

où **B** est la matrice de technologie de la consommation.

Soit $U(\boldsymbol{z})$ la fonction objectif du consommateur définie dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ des caractéristiques. L'optimum correspond à :

Max $U(\boldsymbol{z})$ sous les contraintes : $\boldsymbol{z} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x} \geqslant 0$; $\boldsymbol{px} = R$

Dans l'espace des caractéristiques, l'ensemble des caractéristiques qu'il est possible de consommer avec le budget R est :

$K = \{\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z} = \mathbf{B}\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{x} \geqslant 0 ; \boldsymbol{px} = R\}$

L'optimum devient : Max $U(\boldsymbol{z})$ s.c. $\boldsymbol{z} \in K$

2.5.2. Exemple : Modèle à 3 biens et 2 caractéristiques

Le plan de budget (G) a pour équation :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1,8 & 1 \\ 1 & 1,8 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p} = [1 \quad 1 \quad 1]$ $\mathbf{R} = 1$

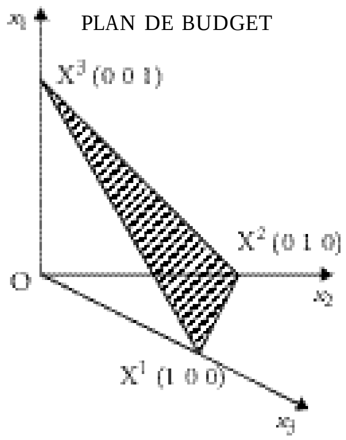
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Les quantités de caractéristiques consommées sont :

$z_1 = 2x_1 + 1,8x_2 + x_3$

$z_2 = x_1 + 1,8x_2 + 2x_3$

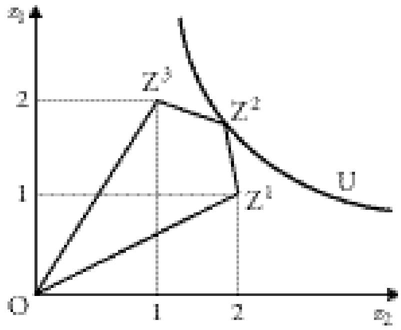
GRAPHIQUE 13 : EXEMPLE DE PLAN DE BUDGET



On peut représenter l'ensemble K dans le plan des deux caractéristiques. Le passage des points de G à K correspond aux valeurs suivantes :

G	→	K
X^1 (1 0 0)		Z^1 (2 1)
X^2 (0 1 0)		Z^2 (1,8 1,8)
X^3 (0 0 1)		Z^3 (1 2)

GRAPHIQUE 14 : EXEMPLE DE COURBE D'INDIFFÉRENCE



Dans cet exemple graphique, l'optimum de consommation correspond au point Z^2 (consommation d'une unité du bien 2), ce qui maximise U(z).

On comprend pourquoi l'évolution des prix peut modifier l'optimum. Si le prix du bien 1 baisse de 20% ($p_1 = 0{,}8$), cela change le point X^1 (plan de budget G) qui devient X'^1(1,25 0 0) et le point Z^1 (2 1) qui devient Z'^1 (2,5 1,25). Ce point correspond sur le graphique à un allongement (homothétie) de 25% du segment OZ^1. La maximisation de U(z) correspondrait alors à la consommation du seul bien 1 en quantité $x_1 = 1{,}25$.

L'apparition d'un nouveau produit possédant les mêmes caractéristiques donnerait une quatrième colonne à la matrice B. Pour que ce produit trouve son marché, il faut que le contenu en caractéristiques, compte tenu de son prix, soit attractif. Dans un marché mûr, cela est parfois difficile et il vaut mieux que la Recherche et Développement des firmes s'oriente vers de nouvelles caractéristiques, absentes jusque-là et valorisables. Le concept de la voiture monospace a correspondu pour Renault à une telle démarche.

Cette nouvelle théorie du consommateur permet de bien expliquer la démarche suivie en publicité. Il s'agit pour le produit d'une marque de rechercher la ou les caractéristiques du produit qui se démarque(nt) positivement de celles des concurrents. Ainsi Volvo s'est efforcé de démontrer la robustesse de ses produits et ses conséquences en termes de sécurité passive (passage d'un camion sur les toits de différentes voitures qui s'écrasent, sauf la Volvo). Michelin fait état de la technicité de ses produits et donc de leur sécurité (équations dans le sillage de ses pneus),… Dans notre graphique cela se traduit par la volonté d'induire dans l'esprit des consommateurs une déformation de la fonction d'utilité qui valoriserait mieux les caractéristiques distinctives des produits de la marque considérée. De ce point de vue la loi de Say [1803] se justifie: «l'offre crée sa propre demande» (le choix des consommateurs est orienté par le choix *ex ante* du producteur).