

Préface

Cet ouvrage a été composé sur la base de l'enseignement dispensé dans l'unité d'ouverture « Symétrie dans la nature » proposée aux étudiants des trois premières années de l'université du Littoral côte d'Opale sur les sites de Calais et de Dunkerque. Étant un cours optionnel, de libre choix, les étudiants qui choisissent cette unité appartiennent à des filières différentes, essentiellement en physique, chimie et mathématiques, mais cette option est également ouverte aux étudiants en informatique, géographie, littérature et économie. Au vu de ce large panel d'étudiants, le but de ce cours est de donner une vision assez vaste de la symétrie en s'appuyant sur des exemples issus des sciences *dures* : physique, chimie, biologie, mathématiques, mais aussi des sciences humaines : sociologie, géographie, et du monde de l'art et de l'esthétisme. Outre les exemples classiques de l'utilisation de la notion de symétrie en physique et chimie moléculaire, en cristallographie et en physique du solide, les aspects biologiques (phyllotaxie, symétrie et asymétrie dans le monde du vivant), et plus généralement les systèmes complexes, ont été abordés. Bien sûr, le formalisme mathématique et surtout les notions d'opération de symétrie et plus formellement de groupe de symétrie ont été introduites, mais de manière nettement plus restreinte que dans des cours spécialisés d'application de la théorie des groupes à la chimie ou à la physique. Par contre, beaucoup d'exemples et d'exercices ne nécessitant qu'une compréhension intuitive de la notion de symétrie et une culture générale sont introduits et stimulent aussi bien la réflexion que l'analyse critique et scientifique des faits ou des phénomènes.

La plupart des exercices qui sont donnés dans ce livre sont issus du folklore scientifique et proviennent de livres et de journaux différents. Le livre le plus utilisé est certainement le petit livre de V. I. Arnol'd¹ que nous recommandons chaudement aux étudiants malgré son titre *Problèmes pour les enfants de cinq à quinze ans*. Les auteurs originaux des problèmes ne sont pas connus dans beaucoup de cas. Les citations, lorsqu'elles sont données, indiquent simplement le livre dans lequel ce problème a été repéré par les auteurs du présent ouvrage.

Boris I. Zhilinskií et Guillaume Dhont
Dunkerque, le 29 avril 2011

1. Arnol'd, 2004 b.

Chapitre I

Le concept de symétrie dans l'histoire

INTRODUCTION

Le nom *symétrie* est porteur de plusieurs sens. La conception commune actuelle et utilisée en mathématiques considère la symétrie en tant que *transformation géométrique*. Pourtant, du point de vue historique, le mot symétrie avait préalablement une signification nettement moins précise. Le grand mathématicien Hermann Weyl¹ associe par exemple à la symétrie des idées semblables à l'harmonie des proportions, la beauté ou le rapport entre le tout et ses parties. Dans son ouvrage *Symmetry*², il commence l'illustration de la symétrie par une sculpture grecque du IV^e siècle avant J.-C. représentant un jeune garçon en prière. Nous débutons les illustrations liées au thème de la symétrie par un exemple de nature morte. Le cône de sable de l'illustration 1 se situe dans le jardin du pavillon d'argent (Ginkaku-ji) à Kyoto et symbolise la perfection au Japon.

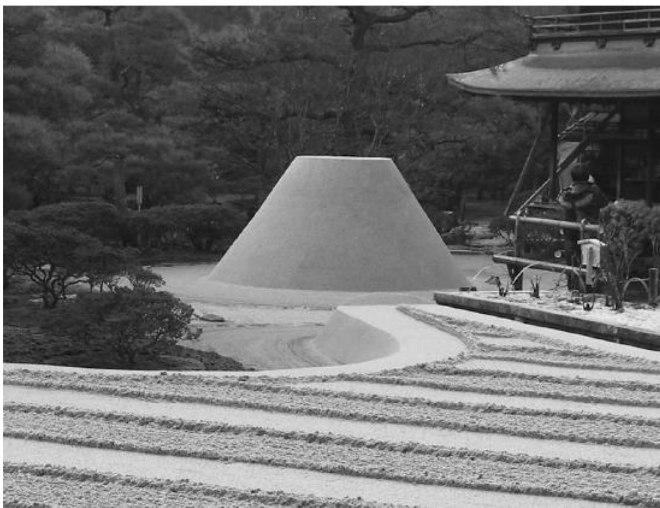


Illustration 1. Cône de sable près du pavillon d'argent (Ginkaku-ji) à Kyoto au Japon. Cet objet géométrique symbolise la perfection et la lumière de la Lune dans la culture japonaise.

-
1. Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955) : mathématicien allemand.
 2. Weyl, 1997.

ORIGINE GRECQUE DE LA NOTION DE SYMÉTRIE

La signification du mot symétrie s'est beaucoup transformée au cours des siècles. La traduction exacte du mot grec *συμμετρία* (*symmetria*) est « la mesure commune ». La première partie *sym* signifie « commun » et la racine *metros* signifie « la mesure ». Les Grecs se servaient de ce mot pour traduire une harmonie entre les parties différentes d'un objet ou des proportions agréables entre les parties composant le tout. Cette notion fut également employée à propos du rythme des poèmes et dans le domaine musical. Le concept de symétrie était appliqué par ailleurs à l'univers en soulignant son organisation supposée parfaite, par opposition au chaos et aux structures désordonnées.

Selon la légende, le mot *symétrie* fut introduit par le sculpteur grec Pythagore qui vivait au ^v^e siècle avant J.-C. dans la ville de Reggio de Calabre (sud de l'Italie actuelle). Pourtant, un autre célèbre Pythagore³, mathématicien et philosophe, avait déjà décrit l'ensemble des cinq polyèdres réguliers qui sont connus de nos jours sous le nom de polyèdres réguliers de Platon⁴ : le tétraèdre (illustration 2), l'octaèdre et le cube (illustration 3), le dodécaèdre et l'icosaèdre (illustration 4).

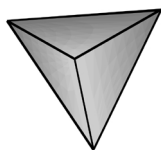


Illustration 2. Le tétraèdre est un polyèdre autodual : en reliant les milieux des faces d'un tétraèdre, nous obtenons de nouveau un tétraèdre dont les sommets sont au milieu des faces du tétraèdre original.

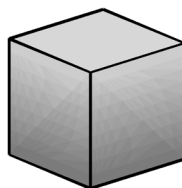


Illustration 3. L'octaèdre et le cube sont deux polyèdres duaux : le milieu d'une face du cube correspond à un sommet de l'octaèdre et réciproquement. Le cube et l'octaèdre possèdent tous les deux douze arêtes.

-
3. Pythagore serait né aux environs de 580 avant J.-C. à Samos, une île de la mer Egée au sud-est de la ville d'Athènes ; sa mort est établie vers 497 avant J.-C., à l'âge de 83 ans.
 4. Platon (Athènes, 427 avant J.-C.–348 avant J.-C.) : philosophe grec, disciple de Socrate.



Illustration 4. Le dodécaèdre et l'icosaèdre sont deux polyèdres duaux : le milieu d'une face de chaque polyèdre correspond à un sommet de l'autre et réciproquement.

Ces cinq formes parfaites étaient associées aux formes des atomes selon Platon, et aux cinq sources de l'existence selon d'autres auteurs. L'illustration 5, due à Augustin Hirschvogel⁵, associe respectivement au feu, à l'air, à la terre, à l'eau et à l'univers le tétraèdre, l'octaèdre, le cube, l'icosaèdre et le dodécaèdre. L'illustration

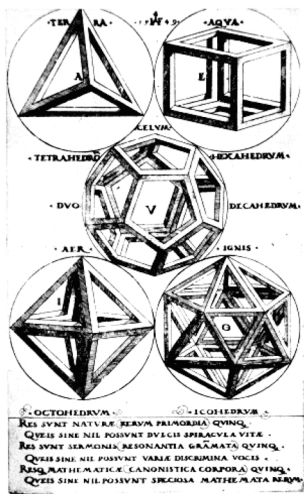


Illustration 5. Représentation par Augustin Hirschvogel des cinq polyèdres de Platon.



Illustration 6. En tournant dans le sens trigonométrique à partir du tétraèdre : dés à quatre, six, huit, vingt et douze faces.

5. Augustin Hirschvogel (1503-1553) : artiste et mathématicien allemand.

6 montre que les cinq polyèdres de Platon sont utilisés à notre époque dans des jeux de société comme dés à 4, 6, 8, 12 ou 20 faces.

Le mathématicien Pythagore et ses disciples considéraient le cercle (dans le plan) et la sphère (dans l'espace) comme des objets parfaits. Selon Aristote⁶, toutes les planètes sont sphériques car n'importe quelle autre forme aurait privé celles-ci de leur perfection divine.

Jusqu'à l'époque de la Renaissance, les termes harmonie, proportion, balance et équilibre étaient considérés comme synonymes du mot symétrie. Étant associée avec la beauté, la vérité et la perfection, la notion de symétrie était appliquée dans des domaines très différents tels la science, l'art ou l'éthique.

Johannes Kepler⁷ a proposé une relation beaucoup plus sophistiquée et inattendue entre les polyèdres réguliers et les orbites des planètes du système solaire. À l'époque de Kepler, six planètes étaient connues : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne. Kepler a réalisé la construction de l'illustration 7 en partant d'une sphère dans laquelle il a inscrit un cube. Il place une deuxième sphère à l'intérieur du cube et inscrit un tétraèdre à l'intérieur de celle-ci. Puis il place dans le tétraèdre une

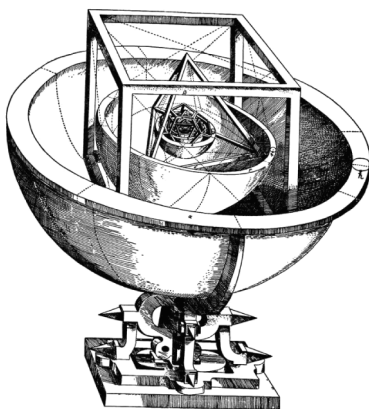


Illustration 7. Modèle de Kepler. La séquence des sphères et des polyèdres réguliers : sphère de Saturne, cube, sphère de Jupiter, tétraèdre, sphère de Mars, dodécaèdre, sphère de la Terre, icosaèdre, sphère de Venus, octaèdre, sphère de Mercure – DR

6. Aristote (Aristotélès) (384 avant J.-C.–322 avant J.-C.) : philosophe grec.

7. Johannes Kepler (ou Keppler) (1571-1630) : astronome, mathématicien et philosophe allemand. Il est à l'origine des trois lois qui portent son nom : i) Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil est un foyer, ii) Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales, iii) Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période est le même ; cette constante est indépendante de la masse de la planète.

troisième sphère et y inscrit le dodécaèdre. Il ajoute alors une quatrième sphère dans laquelle se trouve un icosaèdre. Dans ce dernier, il inscrit une cinquième sphère dans laquelle est inscrit l'octaèdre. Une sixième et dernière sphère est positionnée dans cet octaèdre. Il calcule ensuite les rapports des rayons de ces six sphères et trouve que ces nombres sont proches de ceux calculés à partir des rayons des orbites des planètes Saturne, Jupiter, Mars, Terre, Vénus et Mercure. La construction semble tellement parfaite que Kepler l'utilise même pour prouver l'absence d'autres planètes : il n'existe que cinq polyèdres réguliers (propriété connue depuis Platon) et seules six sphères peuvent ainsi trouver place dans sa construction.

Cette observation de Kepler peut de nos jours sembler naïve et simpliste. Toutefois, l'idée d'observer la nature environnante et de chercher dans son organisation ou sa dynamique une raison liée à la symétrie est judicieuse, actuelle et innovante, même dans le contexte scientifique actuel.

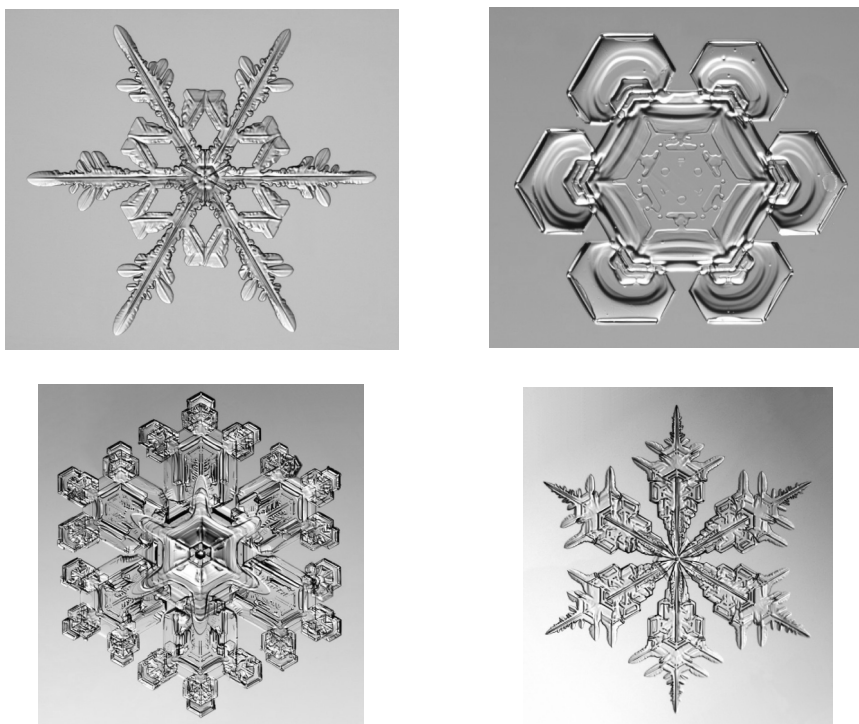


Illustration 8. Photographies de flocons de neige tombant au sol en Ontario, en Alaska, dans le Vermont et dans les montagnes de la Sierra Nevada en Californie. Crédit photo : Kenneth G. Libbrecht, <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals>.

Les esthétiques photographies de cristaux de neige de l'illustration 8 ont été obtenues à l'aide d'équipements spéciaux. Johannes Kepler a étudié et discuté l'architecture des cristaux de neige. Il consigne notamment ses observations sur les formes géométriques des cristaux de neige dans une œuvre intitulée *Le cadeau de nouvel an ou sur la forme hexagonale des flocons de neige* écrite en 1611 sous la forme d'une lettre à un ami⁸. Il remarque que la structure hexagonale est la plus typique pour la matière minérale en général. Ce petit article est considéré comme le premier écrit sur ce qui sera appelé la cristallographie.

Johannes Kepler a remarqué dans ce même ouvrage une différence importante entre les symétries typiques du monde minéral (cristaux de neige, structures cristallines, etc.) et du monde vivant (fleurs, plantes, organismes marins, etc.). La symétrie hexagonale est particulièrement typique du monde minéral alors que la symétrie pentagonale est caractéristique de la nature vivante. Des fleurs à six pétales existent bien sûr mais la structure pentagonale prédomine. Cette symétrie pentagonale se retrouve à l'intérieur de la pomme visible sur l'illustration 9.



Illustration 9. Structure pentagonale d'une fleur et à l'intérieur d'une pomme.

Il est relativement difficile de trouver parmi les espèces vivantes des exemples très symétriques. La symétrie gauche-droite revient le plus souvent mais il existe des exemples plus symétriques. Les squelettes des radiolaires, organismes appartenant au plancton animal, nous émerveillent par leur beauté. Le radiolaire de l'illustration 10 est reproduit d'après une planche d'un livre⁹ de Haeckel¹⁰ et possède la symétrie très élevée icosaédrique avec plusieurs axes de symétrie pentagonale.

Il est remarquable qu'il n'existe pas beaucoup d'exemples de molécules avec cette même symétrie. C'est seulement après la découverte en 1985 de la molécule de fullerène C_{60} que la symétrie icosaédrale est devenue populaire en physique moléculaire et en chimie.

8. Kepler, 1611.

9. Haeckel, 1899.

10. Ernst Heinrich Philipp August Haeckel (1834-1919) : biologiste et philosophe allemand qui a découvert et décrit de nombreuses nouvelles espèces.

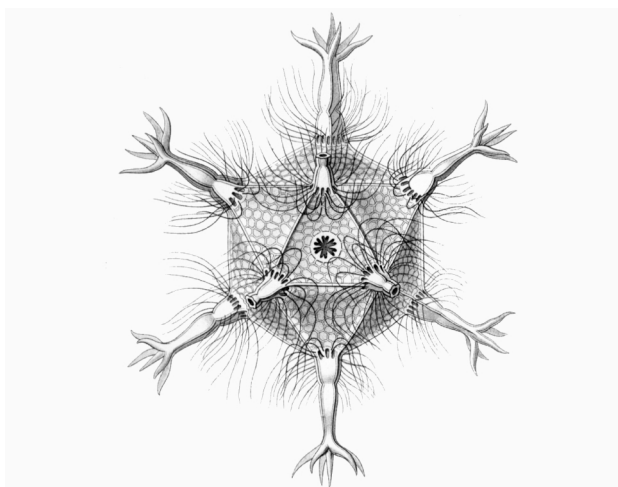


Illustration 10. Illustration d'un radiolaire réalisée par Haeckel.

Des exemples de symétrie hexagonale dans le monde vivant sont connus, il suffit de mentionner le nid d'abeilles (illustration 11).

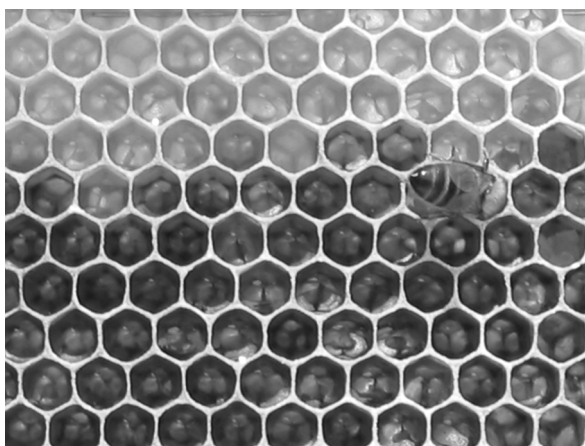


Illustration 11. Photographie d'un nid d'abeilles.

La régularité de l'arrangement fabriqué par les abeilles est étonnante, et encore plus si nous remarquons que la structure en nid d'abeilles est en quelque sorte optimale : la surface qui sépare les cellules individuelles présente une aire minimale (cf. chapitre 4, p. 67).

L'apparition d'une structure hexagonale régulière dans un milieu continu (l'eau, par exemple) en l'absence d'êtres vivants (cf. illustration 12) peut surprendre et faussement induire la présence d'organismes biologiques pour interpréter ce type de

structures régulières. En réalité, le phénomène observé n'est que l'effet de la convection due à l'organisation de courants dans le liquide en présence d'un flux de chaleur. Ce phénomène est connu sous le nom de convection de Rayleigh¹¹-Bénard¹² et il peut être observé chez soi, en expérimentant simplement dans sa cuisine à partir d'ustensiles et de produits alimentaires courants¹³ :

Allez dans la cuisine, allumez le fourneau, et placez-y une poêle (disons d'environ trente centimètres de diamètre) remplie d'un verre d'eau et des trois-quarts d'un verre de riz. La quantité de chaleur produite par unité de temps par la flamme est votre paramètre de contrôle ; au début, chauffez peu, mélangez l'ensemble et attendez que le système atteigne l'équilibre. Par la suite, augmentez le chauffage. Vous observez que lorsque celui-ci est important, les grains de riz forment une structure particulière, avec de nombreuses lacunes ; si vous observez la disposition, vous remarquerez une symétrie hexagonale. (...). Cet exemple est en rapport avec la physique et possède son propre nom, la convection de Bénard. Les cellules de convection sont appelées cellules de Bénard. Ce phénomène prend place, mis à



Illustration 12. Convection de Rayleigh-Bénard (huile de silicone et aluminium).

Crédit photo : Dale E. Stille, Instructional Resources, Department of Physics and Astronomy, University of Iowa.

11. John William Strutt, plus connu sous son titre Lord Rayleigh (1842-1919) : physicien anglais, lauréat du prix Nobel de physique en 1904 pour ses travaux concernant « la masse volumique des gaz de l'air et la découverte de l'argon ».
12. Henri Bénard (1874-1939) : physicien français. Il est connu pour ses travaux sur la « convection de Bénard », issus de sa thèse « Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection en régime permanent » soutenue au Collège de France en 1901.
13. Gaeta, 1990.

part dans votre cuisine, dans les étoiles. Si vous regardez un livre d'astronomie, vous trouverez probablement une photographie de la surface du soleil présentant le même type de structure que celle observée dans votre poêle surchauffée.

Certaines réactions chimiques découvertes au milieu du xx^e siècle, la plus connue étant la réaction de Belousov¹⁴-Zhabotinskii¹⁵, sont accompagnées d'oscillations périodiques de la couleur dans le temps et dans l'espace. Ce sont des exemples remarquables d'auto-organisation et d'apparition de symétrie dans des systèmes non-biologiques.

Revenons vers le monde biologique : nous ne pouvons pas ignorer l'existence de structures spécifiques dues à l'organisation des feuilles, des graines, des pétales, etc, qui sont connues sous le nom de phyllotaxie. Un agencement structuré se voit facilement sur une pomme de pin, un ananas, un cactus, un tournesol ou un chou. Le plus énigmatique est la présence simultanée de deux types de spirales (n_g spirales gauches et n_d spirales droites), les nombres n_g et n_d coïncidant dans la plupart des cas avec deux entiers naturels¹⁶ consécutifs de la suite de Fibonacci évoquée au chapitre 5. Le tournesol de l'illustration 13 et le chou romanesco de l'illustration 14 montrent cette propriété. Pour cet exemple de tournesol, 34 spires gauches et 21 spires droites sont visibles, et aussi bien 21 que 34 font partie de la suite de Fibonacci.

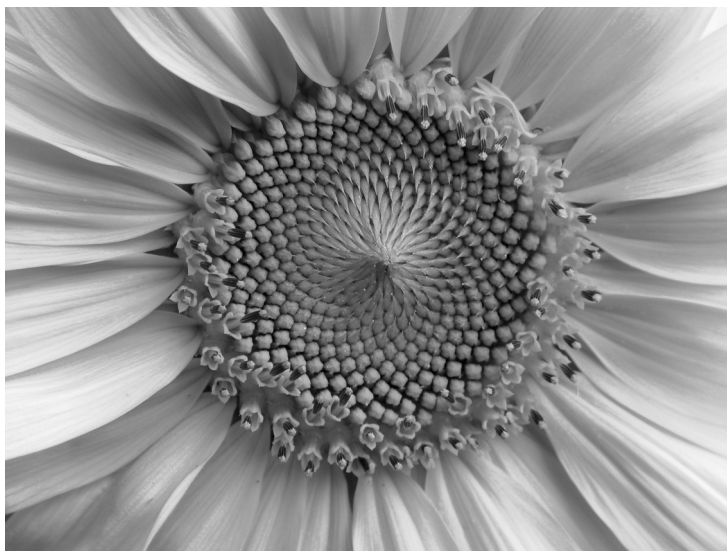


Illustration 13. Un tournesol.

-
14. Boris Pavlovich Belousov (1893-1970) : chimiste et biophysicien russe et soviétique. Il découvre la réaction maintenant appelée réaction de Belousov-Zhabotinskii en 1951.
 15. Anatolii Markovich Zhabotinskii (1938-2008) : biophysicien soviétique (et américain). Il étudie en 1961 le mécanisme de la réaction découverte par Belousov au cours de sa thèse.
 16. Ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, ...



Illustration 14. Un chou romanesco.

La structure du chou romanesco est encore plus remarquable car il révèle une similitude d'échelle en plus de l'organisation en spirales gauches et droites.

POLYÈDRES RÉGULIERS ET LEUR GÉNÉRALISATION

Les polygones (qui appartiennent au plan) et les polyèdres (plongés dans l'espace) réguliers sont des exemples classiques d'objets symétriques. Nous développons maintenant un autre ensemble de réflexions et de généralisations sur le thème de la symétrie. Bien que l'infinité de polygones réguliers et les cinq polyèdres réguliers soient déjà connus depuis la Grèce antique, l'idée de construire ou d'imaginer d'autres objets parfaits et harmonieux, c'est-à-dire symétriques, fut bien sûr fort tentante. Les polygones comme le pentagramme (pentagone étoilé) ou l'étoile de David¹⁷ sont connus depuis bien longtemps et constituent des symboles ésotériques ou religieux.

La notion mathématique de convexité introduit une différence parmi l'ensemble des polygones envisageables. Les polygones réguliers traditionnels sont convexes, mais un polygone avec tous ses côtés de longueur identique peut être aussi non-convexe. Pour vérifier si un polygone est convexe, il suffit de construire une droite qui prolonge un des côtés du polygone. Cette droite sépare le plan en deux parties. Si tout le polygone se trouve dans une seule partie du plan (et ceci pour n'importe quel côté) alors le polygone est convexe. L'illustration 15 donne des exemples de polygones convexes et non-convexes.

17. L'étoile de David est le symbole du judaïsme. Elle représente, selon la tradition juive, l'emblème du roi David, un personnage de la Bible. Aujourd'hui, on la trouve sur le drapeau de l'état d'Israël.

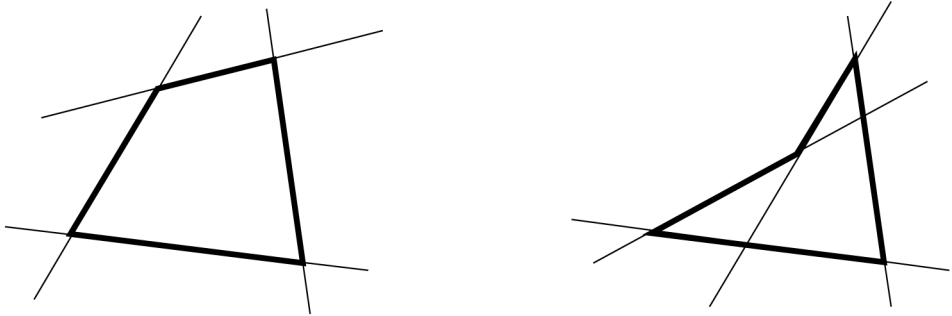


Illustration 15. Quadrilatère convexe et quadrilatère non-convexe.

Considérons les cas du pentagone régulier et du pentagramme pour lesquels tous les sommets sont équivalents et tous les côtés sont de longueur égale. Les intersections entre côtés sont permises dans le cas du pentagramme. Pour construire des polygones où tous les sommets et tous les côtés sont équivalents, nous commençons par N points équidistants sur un cercle. La construction du polygone régulier à N côtés consiste à relier par un trait les points consécutifs. Mais nous pouvons également connecter chaque point, non pas avec son voisin direct, mais plutôt avec un point plus éloigné. Cette construction donne des figures plus complexes, le pentagramme et l'étoile de David en sont deux exemples. Cette procédure génère les polygones de l'illustration 16 : deux pentagones, deux hexagones (un de ces hexagones, l'étoile de David, est une superposition de deux triangles), trois heptagones, ainsi que trois octogones (dont l'un est la superposition de deux carrés), etc.

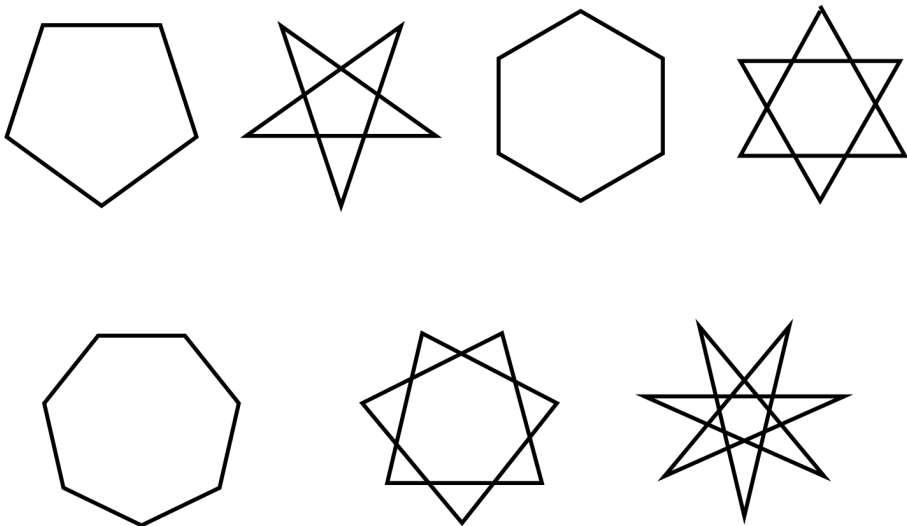


Illustration 16. Polygones convexes et non-convexes (étoilés).
Il y a deux pentagones, deux hexagones et trois heptagones différents.

Cette construction dans le plan de polygones étoilés, non-convexes, se généralise aux polyèdres dans l'espace à trois dimensions. L'histoire de la construction des polyèdres réguliers non-convexes est très longue. Il existe quatre polyèdres réguliers non-convexes dans notre espace tridimensionnel. Ces polyèdres, représentés sur les illustrations 17, 18, 19 et 20, sont connus sous le nom de polyèdres de Kepler-Poinsot, même s'ils ont été connus bien avant Kepler et Poinsot¹⁸.

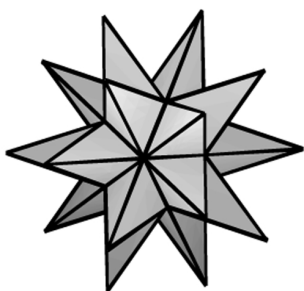


Illustration 17. Polyèdres non-convexes de Kepler : le grand dodécaèdre étoilé.

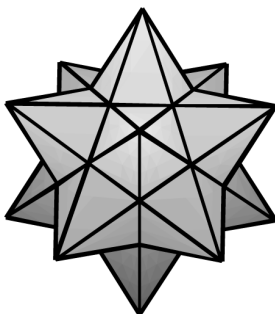


Illustration 18. Polyèdres non-convexes de Kepler : petit dodécaèdre étoilé.

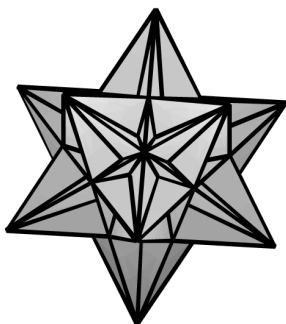


Illustration 19. Polyèdres non-convexes de Poinsot : grand icosaèdre.

18. Louis Poinsot (1777-1859) : mathématicien français, membre de l'académie des sciences (1813).

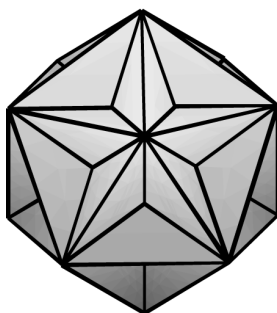


Illustration 20. Polyèdres non-convexes de Poinset : grand dodécaèdre.

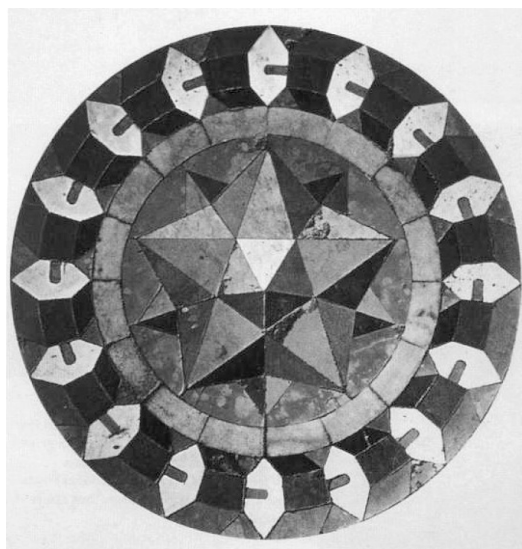


Illustration 21. Extrait d'une mosaïque de la basilique Saint-Marc à Venise.

Par exemple, le petit dodécaèdre étoilé se retrouve représenté sur une mosaïque de la basilique Saint-Marc à Venise, visible sur l'illustration 21. Cette œuvre de Paolo Uccello¹⁹ est datée aux alentours de l'an 1430. Wenzel Jamnitzer²⁰ a élaboré le modèle d'un grand dodécaèdre étoilé présenté sur l'illustration 22. La géométrie et la symétrie ont fasciné des générations d'artistes. De nombreux objets symétriques, réels ou imaginaires, se retrouvent sur les toiles²¹ de M. C. Escher²².

19. Paolo di Dono di Paolo, dit Paolo Uccello (1397-1475) : peintre italien.

20. Wenzel Jamnitzer (1507/1508-1585) : le plus grand orfèvre allemand du xvi^e siècle.

21. Escher, 1989.

22. Maurits Cornelis Escher (1898-1972) : artiste néerlandais, connu pour ses gravures.

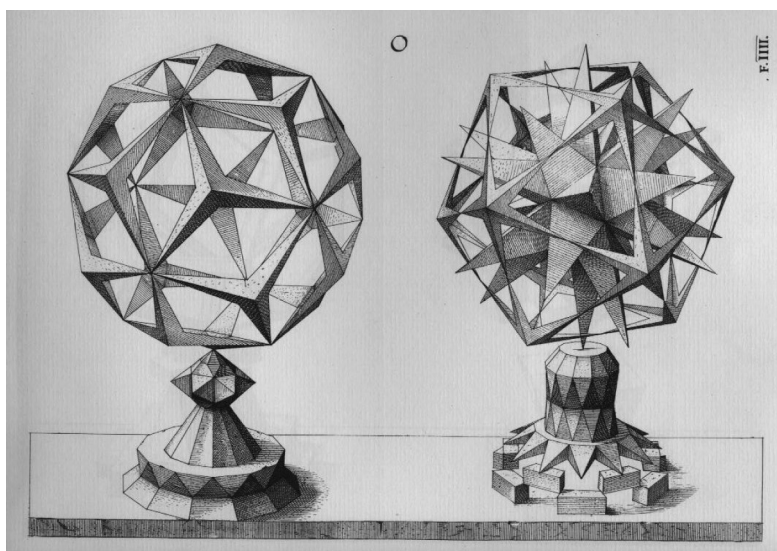


Illustration 22. Grand dodécaèdre étoilé de Wenzel Jamnitzer (1508-1585).

POLYÈDRES ET TOPOLOGIE

Nous allons maintenant appliquer sur les exemples de polyèdres réguliers le principe suivant : étudier des cas particuliers et essayer de formuler les résultats de ces observations sous la forme de propositions universelles valables pour une classe beaucoup plus large d'objets et de phénomènes.

Commençons par le tableau 1 qui donne pour chacun des polyèdres réguliers le nombre de faces F , d'arêtes A et de sommets S et calculons sur la base de ces données la somme alternée $\chi = S - A + F$, appelée caractéristique d'Euler²³. Nous remarquons que la caractéristique d'Euler est égale à 2 pour tous les polyèdres réguliers. Il est clair que ce résultat est vrai pour une classe beaucoup plus large de polyèdres : en effet, la caractéristique d'Euler reste inchangée si nous déformons un polyèdre régulier en changeant les longueurs des arêtes et la forme des faces tout en conservant le nombre de sommets, de faces et d'arêtes. Ainsi, la propriété d'être régulier n'est pas importante pour que la caractéristique d'Euler soit égale à deux. Nous constatons aussi que la caractéristique d'Euler ne change pas si nous remplaçons une face triangulaire par une pyramide triangulaire (un sommet et trois faces).

23. Leonard Paul Euler (1707-1783) : mathématicien et physicien suisse qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Tableau 1. Caractéristique d'Euler $\chi = S - A + F$ pour les cinq polyèdres réguliers (S : nombre de sommets, A : nombre d'arêtes et F : nombre de faces du polyèdre.

Polyèdre	Sommets	Arêtes	Faces	$\chi = S - A + F$
Tétraèdre	4	6	4	2
Octaèdre	6	12	8	2
Cube	8	12	6	2
Dodécaèdre	20	30	12	2
Icosaèdre	12	30	20	2

Au final, la caractéristique d'Euler est un invariant topologique. Il suffit d'imaginer pour s'en rendre compte que vous fabriquez un objet (un polyèdre par exemple) en pâte à modeler. Dans ce cas, toutes les transformations qui modifient la forme de cet objet sans générer de trous ni le déchirer en plusieurs morceaux sont autorisées et ne changent pas sa caractéristique d'Euler. Par conséquent, les surfaces de polyèdres que nous avons analysées sont équivalentes à une surface sphérique.

Pour donner un exemple de polyèdre de caractéristique d'Euler différente de deux, il suffit de prendre un objet topologiquement différent d'une sphère (voir l'exercice 2 p. 19 et éventuellement l'exercice 12 p. 56 du chapitre 3 et l'exercice 17 p. 73 du chapitre 4). Un exemple est le tore (pensez au beignet d'Homer Simpson). Le tore peut être transformé en un polyèdre torique, voir l'illustration 23 par Léonard de Vinci²⁴. La caractéristique d'Euler de tous les polyèdres toriques sera la même, mais elle est différente de la caractéristique d'Euler des polyèdres sphériques (convexes). La cuisine allemande nous fournit un autre exemple d'objet dont la caractéristique d'Euler est encore différente. Il s'agit du bretzel, représenté sur l'illustration 23.

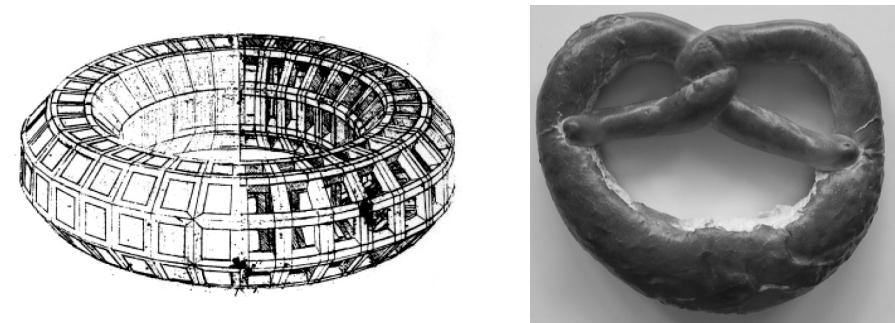


Illustration 23. Dessin d'un polyèdre torique réalisé par Léonard de Vinci (DR) et un bretzel qui présente une topologie plus compliquée.

24. Léonard de Vinci (1452-1519) : peintre italien connu comme un homme d'esprit universel, à la fois artiste, scientifique, ingénieur, inventeur, anatomiste, peintre, sculpteur, architecte, urbaniste, botaniste, musicien, poète, philosophe et écrivain.

SYSTÈMES COMPLEXES ET SYMÉTRIE

La symétrie au sens large d'un arrangement parfait d'éléments qui produit un résultat admirable peut être connectée à l'étude et la caractérisation de systèmes complexes. Les polyèdres réguliers de Platon ont été associés dès l'Antiquité aux concepts, substances, ou phénomènes les plus essentiels comme l'univers, la terre, l'eau, le feu, l'air, etc. Nous avons vu qu'au Moyen Âge, J. Kepler a osé relier le rapport des rayons des orbites planétaires avec le rapport des sphères qui contiennent ou sont inscrites dans des polyèdres réguliers. Au ^{xxi}^e siècle, nous voyons cette hypothèse comme une tentative naïve de raisonnement scientifique. Toutefois, l'idée générale de modéliser les systèmes complexes par l'emploi de modèles simples basés sur la symétrie, la topologie et le comportement universel reste toujours le meilleur outil pour passer de la description des parties *élémentaires* à des systèmes plus complexes possédant un niveau supérieur d'organisation. Le livre de Erwin Schrödinger²⁵ *Qu'est-ce que la vie du point de vue de la mécanique quantique ?*²⁶ fournit un exemple relativement moderne de ce type de raisonnement.

Il faut bien distinguer le réductionnisme (la tentative de réduire la chimie à la physique, la biologie à la chimie puis la physique, etc.) de l'étude de systèmes complexes²⁷ à partir de modèles simples car le comportement de ces derniers n'a absolument rien à voir avec celui du système complexe global. Prenons quelques exemples :

- L'homme en tant qu'objet biologique est un système complexe. Il est encore plus complexe du point de vue de la chimie et de la physique. Pourtant, la symétrie extérieure gauche-droite est clairement visible. Parallèlement, au niveau moléculaire, c'est l'absence de symétrie entre les molécules gauches et droites (non-équivalence des isomères optiques) qui est la plus frappante.
- Un autre exemple de système complexe est la fourmilière²⁸, dans laquelle apparaît le phénomène d'auto-organisation ainsi que des effets coopératifs. L'analyse des systèmes d'insectes sociaux (fourmis, termites, abeilles) a induit la création de nouveaux algorithmes²⁹ utiles pour résoudre des problèmes contenant simultanément de nombreuses variables, par exemple dans les télécommunications. Il arrive parfois qu'une comparaison entre l'organisation d'une fourmilière et notre société soit faite³⁰.

25. Erwin Schrödinger (1887-1961) : physicien autrichien. Prix Nobel de physique (1933) pour le développement du formalisme de la mécanique quantique.

26. Schrödinger, 1944.

27. Boccara, 2004.

28. Deneubourg *et al.*, 1990.

29. Dorigo *et al.*, 2000.

30. Gordon, 1999.

- L'auto-organisation se trouve aussi dans les statistiques sur les publications dans les journaux scientifiques. Si nous étudions la distribution du nombre N d'articles qui ont été cités x fois, alors une analyse des données donne une dépendance en $N(x) \sim x^{-\alpha}$ avec $\alpha \approx 3$.
- Cette propriété se retrouve en économie avec le nombre de personnes N possédant un revenu plus grand que la somme x . L'étude sur la situation en Angleterre à la fin du XIX^e siècle aboutit à une loi en $N(x) \sim x^{-\alpha}$ avec $\alpha \approx 1,5$. Ce nombre α est variable étant donné qu'il dépend des conditions macroéconomiques et politiques. L'illustration 24 schématise ce comportement d'après les données de Vilfredo Pareto³¹ ; il est maintenant appelé loi de Pareto³².

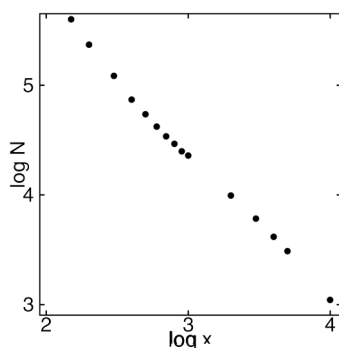


Illustration 24. Distribution des revenus des contribuables britanniques pour l'année 1893-1894. La variable x est le revenu annuel et $N(x)$ est le nombre de personnes possédant un revenu plus grand que la valeur x .

En littérature, la fréquence f d'apparition des mots employés dans une langue peut être analysée en associant à chaque mot un rang r qui dépend de la fréquence : rang 1 pour le mot le plus utilisé, rang 2 pour le suivant et ainsi de suite. Le graphique de $\log f$ en fonction de $\log r$ donne une droite de pente (-1) . Ce résultat signifie que $f \sim r^{-\alpha}$ avec $\alpha \approx 1$. L'illustration 25 donne l'exemple de cette fonction trouvée par Zipf³³ en analysant le roman *Ulysses* de James Joyce³⁴. Ce roman est écrit en anglais et est composé de 260 430 mots. Si les mots *give*, *gives*, *gave*, *given*, *giving*, *giver*, *gift* sont comptés comme des mots différents, il y a dans l'ouvrage 29 899 mots différents. En ajustant une droite à travers les points de l'illustration 25 par la méthode des moindres carrés, nous obtenons une droite de pente $-1,02$.

31. Vilfredo Pareto (1848-1923) : économiste et sociologue italien.

32. Pareto, 1896.

33. George Kingsley Zipf (1902-1950) : linguiste et philologue américain.

34. James Augustine Aloysius Joyce (1882-1941) : romancier et poète irlandais.

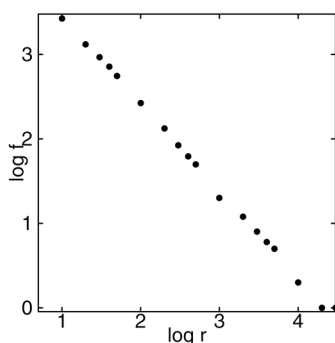


Illustration 25. Fréquence des mots en fonction du rang des mots. Les axes sont en coordonnées logarithmiques.

Les droites que nous avons trouvées dans ces divers exemples indiquent un comportement universel, et, en quelque sorte simple, des systèmes complexes (voir aussi l'exercice 3, p. 20). Nous pouvons aussi regarder ces exemples comme la manifestation de la symétrie, et souligner l'harmonie du comportement et de l'organisation.

Quelle est l'origine de ce comportement universel dans des systèmes vraiment très différents ? Il n'est peut-être pas dû uniquement à la symétrie mais celle-ci est un phénomène universel qui apparaît dans divers domaines. En étudiant la symétrie et ses manifestations, nous apprenons l'universalité des comportements et du langage utilisé pour les décrire, notamment les outils mathématiques appropriés.

Le choix des outils mathématiques ou du langage approprié n'est pas toujours évident comme le montre par exemple la tentative de Birkhoff³⁵ de formaliser la notion de beauté en utilisant précisément la symétrie et les déviations de la symétrie³⁶.

EXERCICES

Exercice 1 : le partage d'un gâteau vu comme une activité distrayante

1. Trois personnes désirent se partager le gâteau de forme rectangulaire de l'illustration 26, à gauche. La première personne se découpe un morceau rectangulaire comme elle l'entend, voir schéma de droite. Les deux autres personnes veulent ensuite partager ce qui reste du gâteau en deux parties égales (de même aire). Comment peut-on réaliser cette construction avec une règle et un couteau (qui sert de crayon) ?

35. George David Birkhoff (1884-1944) : mathématicien américain.

36. Birkhoff, 1933.

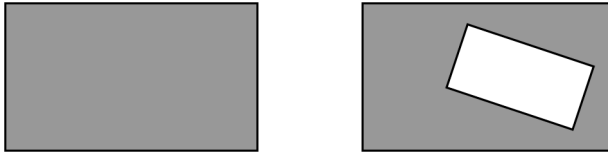


Illustration 26. Gâteau de forme rectangulaire. À gauche : situation initiale.
À droite : après prélèvement de la première part.

2. *Première généralisation : le gâteau possède cette fois-ci la forme d'un quadrilatère arbitraire. Le premier morceau choisi est aussi un quadrilatère arbitraire. En plus de la règle et du couteau, l'usage du compas est autorisé.*
3. *Deuxième généralisation : le gâteau présente maintenant la forme d'un polygone arbitraire. Le premier morceau choisi est aussi un polygone arbitraire. En plus de la règle et du couteau, l'usage du compas est autorisé.*

Exercice 2 : à propos des polyèdres

1. *Une chenille peut se déplacer dans la chambre cubique de l'illustration 27 en se promenant sur les murs, le plancher ou le plafond. Elle part du coin A (à gauche, sur le plancher) et cherche à joindre le coin B (à droite, au plafond). Trouvez le chemin le plus court suivi par la chenille. Ce chemin est-il symétrique ? Quel est le nombre de solutions équivalentes ?*

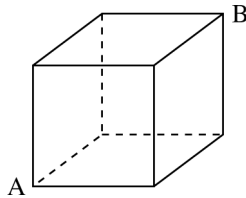


Illustration 27. Chenille dans une chambre cubique. Elle part du sommet A pour rejoindre le sommet B.

2. *Quels polygones sont susceptibles d'apparaître dans l'intersection d'un cube avec un plan ? Est-il possible d'avoir un pentagone ? un heptagone ? un hexagone régulier ?*
3. *Les polyèdres réguliers qui ne possèdent que des faces triangulaires sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Vérifiez pour ces trois polyèdres puis prouvez pour tous les polyèdres convexes à faces triangulaires que le nombre de faces F et le nombre de sommets S sont liés par la relation $F = 2S - 4$.*
4. *Transformez un tore en un polyèdre. Calculez la caractéristique d'Euler d'un tel polyèdre (non-convexe). Comparez avec la caractéristique d'Euler des polyèdres convexes.*

Rappel : la caractéristique d'Euler χ est définie par l'expression :

$$\chi = \text{nombre de faces} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de sommets}.$$

La caractéristique d'Euler pour les polyèdres convexes est 2.

5. Essayez de construire un polyèdre qui possède une caractéristique d'Euler égale à -2 . Calculez la caractéristique d'Euler pour un polyèdre qui ressemble à un bretzel (voir l'illustration 23).
6. Calculez la caractéristique d'Euler pour les polyèdres non-convexes de Kepler-Poinsot (grand dodécaèdre, grand icosaèdre, grand dodécaèdre étoilé, petit dodécaèdre étoilé) en les considérant comme des polyèdres réguliers.

Rappel : les faces du grand dodécaèdre sont des pentagones réguliers. Les faces du grand icosaèdre sont des triangles réguliers. Les faces du grand dodécaèdre étoilé ou du petit dodécaèdre étoilé sont des pentagrammes (pentagone étoilé).

Vérifiez que si l'enveloppe d'un polyèdre de Kepler-Poinsot est regardée comme un polyèdre non-régulier sans auto-intersection, alors sa caractéristique d'Euler est égale à deux.

Exercice 3 : loi de Benford

La loi de Benford³⁷ discute de la probabilité d'apparition d'un chiffre donné en tant que premier chiffre d'un nombre appartenant à un ensemble de données physiques, biologiques, géographiques ou économiques.

1. Soit l'ensemble 2^n formé des puissances consécutives de 2, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Le premier chiffre de chaque nombre de cette suite est extrait et la fréquence d'apparition des chiffres ainsi obtenus est calculée. Le tableau 2 donne les résultats obtenus. Il est remarquable que tous les chiffres ne sont pas équiprobables : notamment, le chiffre 1 apparaît plus fréquemment que les autres chiffres. Retrouvez ces fréquences d'apparition.

Indice : remplacez la fonction $y = 2^n$ par $\log_{10} y = n \log_{10} 2$ ($\log_{10} k$ désigne le logarithme décimal de k) et analysez la partie fractionnaire de $\log_{10} y$, c'est-à-dire $(\log_{10} 2^n) \bmod 1$.

Tableau 2. Fréquence d'apparition des chiffres en tant que premier chiffre des nombres 2^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

2. Ce type d'analyse statistique se mène par exemple sur des données concrètes comme la population des 193 pays du monde. Le tableau 3 indique combien de pays ont une population dont le nombre commence par le chiffre i .

37. Frank Benford (1883-1948) : ingénieur et physicien américain.

Tableau 3. Nombre d'occurrence du chiffre i en tant que premier chiffre de la population d'un pays.

Chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pays	57	35	25	17	19	14	11	10	5

Le chiffre 1 est ici aussi le chiffre qui apparaît le plus souvent ! Sa fréquence d'apparition est approximativement six fois supérieure à celle du chiffre 9. Pouvez-vous trouver une explication à ce comportement ?